КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'77
София . 1980, с. 95—98

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'77
Sofia . 1980, p. 95—98

О ТЕОРЕМАХ ВЛОЖЕНИЯ С ПРЕДЕЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ БЕССЕЛЯ

В. М. Кокилашвили

Резюме. В работе вводятся пространства $\Lambda_{\mathbf{p}, \mathbf{w}, \theta}$ обобщенных функций, которые расширяют известные пространства Лизоркина—Трибеля. В качестве весовых функций рассматриваются неотрицательные измеримые функции $w(x)$, заданные на E_n, такие, что для произвольного куба $Q \in E_n$

$$\|w\|_{L_q(Q)} \cdot \|w^{-1}\|_{L_{p'}(Q)} \leqq c\,|Q|^{1-(1/p-1/q)},\ 1<p<q<+\infty,\ p'=p/(p-1),$$

где c не зависит от Q (класс $A(q, p, E_n)$).

Далее изучены пространства $\Lambda^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p}, \mathbf{w}, \theta}$ — пространства функций, бесселевы частные производные которых принадлежат $\Lambda_{\mathbf{p}, \mathbf{w}, \theta}$.

С помощью метода мультипликаторов изучены вопросы о представлении элементов пространства $\Lambda^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p}, \mathbf{w}, \theta}$ в виде обобщенных сверток и доказана теорема вложения с предельным показателем для этих пространств.

В настоящее время при решении задачи о расширении и обобщении известной классификации функциональных пространств С. Л. Соболева [1] достигнут значительный прогресс. Исследования последних лет по этой проблеме изложены в монографии [2]. В работах [3—5] применением и развитием метода мультипликаторов дано естественное расширение классификации С. Л. Соболева $W_p^{(l)}$ на дробные показатели l.

В настоящем сообщении при помощи метода мультипликаторов изучены пространства функций, бесселевы частные производные которых принадлежат некоторым функциональным пространствам, описанным с помощью преобразований Фурье.

Пусть E_n — n-мерное пространство точек $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $S(E_n)$ — пространство Шварца основных функций на E_n, S' — простренство непрерывных линейных функционалов (обобщенных функций) над $S(E_n)$. Далее $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in E_n$ и $m=(m_1, \ldots, m_n)$ — точка с целочисленными координатами. В дальнейшем через $\varphi_m(x)$ будем обозначать функцию, преобразование Фурье которой сосредоточено в $Q_m=\{\lambda : 2^{m_i} \leqq |\lambda_i| < 2^{m_i+1}\}$ и там совпадает с преобразованием Фурье функции $\varphi(x)$.

Пусть теперь $\mathbf{p}=(p_1, \ldots, p_n)$, $1<p_j<+\infty$, $\mathbf{w}=(w_1, \ldots, w_n)$, где $w_i (i=1, \ldots, n)$ — неотрицательные измеримые функции, заданные на E_1.

Через $L_{\mathrm{p,\,w}}$ обозначим пространство всех измеримых функций $f(x)$, заданных на E_n, для которых

$$|f, L_{\mathrm{p,\,w}}| = \{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} [\ldots (\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^{p_n} w_n^{p_n}(x_n)\, dx_n)^{p_{n-1}/p_n}$$

$$w_{n-1}^{p_{n-1}}(x_{n-1}) dx_{n-1})^{p_{n-2}/p_{n-1}} \ldots]^{p_1/p_2} w_1^{p_1}(x_1)\, dx_1\}^{1/p_1} < +\infty.$$

Предположим, что для некоторого w величина

(1) $$|\varphi, \Lambda_{\mathrm{p,\,w},\,\theta}| = |(\sum_m |\varphi_m(x)|^\theta)^{1/\theta}, L_{\mathrm{p,\,w}}| < +\infty,\ \varphi \in S,\ 1 \leqq \theta < +\infty,$$

тогда пополнение пространства S по норме (1) будем называть пространством $\Lambda_{\mathrm{p,\,w},\,\theta}$. При $w_i \equiv 1$, $p_1 = p_2 = \cdots = p_n$ эти пространства были введены и изучены в работах [5—6].

Далее неотрицательную измеримую функцию $\varrho(x)$, заданную на E_n, будем называть функцией класса $A(r, s, E_n)$, если существует такая константа c, что для произвольного куба $I \subset E_n$ имеет место неравенство

(2) $$(|I|^{-1} \int\limits_I [\varrho(x)]^r\, dx)^{1/r} (|I|^{-1} \int\limits_I [\varrho(x)]^{-s'} dx)^{1/s'} \leqq c,$$

где $s' = s/(s-1)$.

В работе [7] было показано, что для ограниченности оператора типа потенциала из $L_{p,w}$ в $L_{q,w}$, $1 < p < q < +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы $w \in A(q, p, E_n)$.

Как нетрудно видеть, $A(r, s, E_n) \subset A(s, s, E_n)$ при $r > s$. Класс $A(s, s, E_n)$ будем обозначать через $A(s, E_n)$. Можно показать, что, во-первых, если $\varphi \in S(E_n)$ и $w_i \in A(p_i, E_1)$, то тогда $|\varphi, \Lambda_{\mathrm{p,\,w},\,\theta}| < +\infty$, во-вторых, $f \in \Lambda_{\mathrm{p,\,w},\,\theta}$ является элементом пространства S'. Преобразование Фурье $\tilde{f} = Ff$ понимается в последующем как преобразование Фурье обобщенной функции f. Через $F^{-1}f$ будем обозначать прообраз Фурье $f \in S'$.

Бесселевой производной S'-дистрибуции f порядка r_j по переменному x_j, по определению, есть выражение

$$\frac{\partial^{r_j} f}{\partial x_j^{r_j}} = F^{-1}[(1+\lambda_j^2)^{r_j/2} Ff].$$

Определение. S' — дистрибуция f принадлежит пространству $\Lambda^{\mathbf{r}}_{\mathrm{p,\,w},\,\theta}$, если ее бесселевы производные порядков $r_1, \ldots, r_n$ по переменным $x_1, \ldots, x_n$ соответственно принадлежат пространству $\Lambda_{\mathrm{p,\,w},\,\theta}$.

Положим

$$|f, \Lambda^{\mathbf{r}}_{\mathrm{p,\,w},\,\theta}| = \sum_{i=1}^{n} |\frac{\partial^{r_i} f}{\partial x_i^{r_i}}, \Lambda_{\mathrm{p,\,w},\,\theta}|.$$

Теорема 1. *Для того, чтобы $f \in S'$ принадлежала к $\Lambda^{\mathbf{r}}_{\mathrm{p,\,w},\,\theta}$, необходимо и достаточно, чтобы имело место представление $f = G_r * h$, $h \in \Lambda_{\mathrm{p,\,w},\,\theta}$, где ядро G_r полностью характеризуется ее преобразованием Фурье*

$$FG_r(\lambda) = [\sum_{j=1}^{n} (1+\lambda_j^2)^{\alpha_j}]^{-r_0/2},\ \alpha_j = r_j/r_0,\ r_0 = \max_j r_j.$$

Вместе с этим $|f, \Lambda^{\mathbf{r}}_{\mathrm{p,\,w},\,\theta}| \sim |h, \Lambda_{\mathrm{p,\,w},\,\theta}|$.

Пусть l_j — целые положительные числа. Тогда $(i\lambda)^l = (i\lambda_1)^{l_1} \dots (i\lambda_n)^{l_n}$ — бесконечно дифференцируемая функция полиномиального типа. Смешанная производная $D^l f\,(l = l_1 + \dots + l_m,\ 1 \leq m \leq n,\ l_j$ — различны) понимается как $D^l f = F^{-1}[(i\lambda)^l \widetilde{f}],\ f \in S'$.

Теорема 2. *Пусть* $f \in \Lambda^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p},\mathbf{w},\theta}$, $1 < p_i < +\infty$, $w_i \in A(p_i, E_1)$ $(i = 1, \dots, n)$

Если $\varkappa = 1 - \Sigma_{j=1}^n l_j/r_j \geq 0$, *то тогда* $D^l f \in \Lambda^{\mathbf{v}}_{\mathbf{p},\mathbf{w},\theta}$, *где* $\mathbf{v} = \varkappa \mathbf{r}$.

Теорема 3. *Пусть* $1 < p_i < q_i < +\infty$, $1 \leq m \leq n$, $l = (l_1, \dots, l_n)$, $l_i > 0$ *Далее предположим, что* $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m, 1, \dots, 1)$, $w_i \in A(q_i, p_i, E_1)$ $(i = 1, \dots, m)$ *и*

$$\varkappa(l) = 1 - \sum_{j=1}^{m} (1/p_j - 1/q_j)\, 1/r_j - \sum_{j=m+1}^{n} 1/r_j p_j - \sum_{j=1}^{n} l_j/r_j \geq 0.$$

Если $f \in \Lambda^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p},\mathbf{w},\theta}(E_n)$, *то тогда* $\psi(x_1, \dots, x_m) = D^l f(x_1, \dots, x_m, x^0_{m+1}, \dots, x^0_n)$ *для произвольных фиксированных* $x^0_{m+1}, \dots, x^0_n$ *принадлежит* $\Lambda^{\mathbf{v}}_{\mathbf{q},\mathbf{w},\theta}$, *где* $\mathbf{v} = \varkappa \mathbf{r}$. *При этом это вложение непрерывно* : $|D^l f, \Lambda^{\mathbf{v}}_{\mathbf{q},\mathbf{w},\theta}(E_m)| \leq c\,|f, \Lambda^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p},\mathbf{w},\theta}(E_n)$.

Доказательство этой теоремы опирается на следующую лемму, которая, со своей стороны, обобщает один результат В. П. Ильина [8].

Лемма. *Пусть* $\|x\| = \{\Sigma_{j=1}^n |x_j|^{2a_j}\}^{1/2}$. *Далее предположим, что*

$$s = \sum_{j=1}^{n} 1/a_j p'_j + \sum_{j=1}^{n} 1/a_j q_j,\ 1 \leq m \leq n,\ 1 < p_j < q_j < +\infty;\ j = 1, \dots, n,$$

$$p' = p/(p-1),\ \mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m, 1, \dots, 1),\ w_i \in A(q_i, p_i, E_1);\ i = 1, \dots, m.$$

Если $h(x) = \int_{E_n} \|x - y\|^{-s} g(y)\, dy$, *то тогда для произвольной функции* $g \in L_{\mathbf{p},\mathbf{w}}(E_n)$ *функция* $h_0(x_1, \dots, x_m) = h(x_1, \dots, x_m, x^0_{m+1}, \dots, x^0_n)$ *при любых фиксированных* $x^0_{m+1}, \dots, x^0_n$ *принадлежит пространству* $L_{\mathbf{q},\mathbf{w}_0}(E_m)$, *где* $\mathbf{w}_0 = (w_1, \dots, w_m)$ *и имеет место неравенство*

$$|h_0, L_{\mathbf{q},\mathbf{w}_0}(E_m)| \leq c\,|g, L_{\mathbf{p},\mathbf{w}}(E_n)|,$$

где постоянная c *не зависит от* g *и* $x^0_{m+1}, \dots, x^0_n$.

Наконец, заметим, что в изотропном случае соответственные результаты были получены ранее в моей работе [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Л. Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Ленинград, 1950.
2. С. М. Никольский. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. Москва, 1969.
3. П. И. Лизоркин. Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и функциональные пространства $L^r_p(E_n)$. *Мат. сборник*, 60, 1963, № 3, 325—553.
4. П. И. Лизоркин. Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений. *Труды Мат. ин-та АН СССР*, 105, 1969, 89—167.

5. П. И. Лизоркин. Свойства функций из пространств $\Lambda^r_{p,\theta}$. *Труды Мат. ин-та АН СССР*, **131**, 1974, 158—181.
6. H. Triebel. Spaces of distributions of Besov type in Euclidean h-space... *Ark. Math.*, **11**, 1973, 13—64.
7. B. Muckenhoupt, R. L. Wheeden. Weighted norm inequalities for fractional integrals. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **192**, 1974, 261—274.
8. В. П. Ильин. Свойства некоторых классов дифференцируемых функций многих переменных. *Труды Мат. ин-та АН СССР*, **66**, 1962, 227—368.
9. В. М. Кокилашвили. О мультипликаторах преобразований Фурье и теоремах вложения в некоторых функциональных пространствах. *Матем. заметки*, **20**, 1976, № 4, 605—610.

Математический институт
Тбилиси СССР

Получено 22. 8. 1977