КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'77
София . 1980, с. 99—104

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'77
Sofia . 1980, p. 99—104

АППРОКСИМАЦИЯ СПЛАЙНАМИ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ МЕТРИКЕ

Н. П. Корнейчук

Резюме. В статье формулируются некоторые общие задачи теории сплайн-аппроксимации и приводятся результаты, дающие точное решение поставленных задач в том или ином частном случае. Затронуты следующие аспекты теории приближения: 1) наилучшее приближение на классах функций; 2) неравенства Джексона; 3) интерполяция и наилучшие линейные методы; 4) одновременное приближение функции и ее производных.

Новые результаты связаны, главным образом, с аппроксимацией в интегральной метрике. Речь будет идти только о неулучшаемых результатах с точными константами. Как правило, во всех формулируемых ниже задачах порядковые оценки известны (или легко могут быть найдены).

Через C и $L_p(1\leq p\leq\infty,\ L_1=L,\ L_\infty=M)$ ниже обозначаются пространства 2π-периодических функций с нормой соответственно:

$$\|f\|_C=\max\{|f(t)|:t\},\ \|f\|_M=\|f\|_{L_\infty}=\operatorname*{supvrai}_t|f(t)|,$$

$$\|f\|_p=\|f\|_{Lp}=(\textstyle\int_0^{2\pi}|f(t)|^p\,dt)^{1/p};\quad 1\leq p<\infty.$$

Если X есть C или L_p, то $X^r(r=1,2,\ldots)$ будет обозначать множество $r-x$ периодических интегралов от $\varphi\in X$, т. е. $f\in X^r$ означает, что f имеет период 2π, $f^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывна, а $f^{(r)}\in X$.

Введем в рассмотрение модуль непрерывности функции $f\in X(X$ есть C или $L_p)$: $\omega(f,\delta)_X=\sup\{\|f(\cdot+t)-f(t)\|_X:\ 0\leq t\leq\delta\}$, $\omega(f,\delta)_C=\omega(f,\delta)$, а также следующие классы функций:

$$W^r_X=\{f:f\in X^r,\ \|f^{(r)}\|_X\leq 1\},\ W^r_{L_p}=W^r_p;\ r=1,2,\ldots,$$

$$H^\omega=\{f:f\in C,\ \omega(f,\delta)\leq\omega(\delta)\},$$

где $\omega(\delta)$ — заданный модуль непрерывности, т. е. определенная на $[0,\infty)$ функция, такая, что $\omega(0)=0$, $0\leq\omega(\delta_2)-\omega(\delta_1)\leq\omega(\delta_2-\delta_1)\ (0\leq\delta_1<\delta_2)$;

$$W^rH^\omega=\{f:f\in C^r,\ f^{(r)}\in H^\omega\},\ W^0H^\omega=H^\omega.$$

С помощью мажоранты интегрального модуля непрерывности $\omega(f,\delta)_{L_p}$ аналогично задаются классы H^ω_p и $W^rH^\omega_p(1\leq p\leq\infty)$ функций $f\in L_p$, соответственно $f\in L^r_p$.

Пусть $E(f,F)_X=\inf\{\|f-\varphi\|_X:\varphi\in F\}$ — наилучшее приближение (в метрике пространства X) функции $f\in X$ подпространством F и, если

$\mathfrak{M}$ — некоторый класс функций из X, то $E(\mathfrak{M}, F)_X = \sup\{E(f, F)_X : f \in \mathfrak{M}\}$. Вместо $E(f, F)_{L_p}$ и $E(\mathfrak{M}, F)_{L_p}$ пишем соответственно $E(f, F)_p$ и $E(\mathfrak{M}, F)_p$.

В качестве аппарата приближения будут рассматриваться 2π-периодические сплайны дефекта 1 по разбиению $\{k\pi/n\}$. Подпространства таких сплайнов обозначаются через S_{2n}^r, $r=0,1,2,\ldots$, где r — порядок сплайна. Таким образом

$$S_{2n}^0 = \{\varphi : \varphi \in M,\ \varphi(t) = c_k (t \in \Delta_k \overset{\text{def}}{=} [k\pi/n,\ (k+1)\pi/n)\};\ n = 1, 2, \ldots,$$

$$S_{2n}^r = \{\varphi : \varphi \in C^{r-1},\ \varphi^{(r)}(t) = c_k (t \in \Delta_k)\};\ n, r = 1, 2, \ldots .$$

Как выяснилось в последнее время, эти сплайны обладают рядом замечательных экстремальных свойств аппроксимативного характера, являясь для важных классов функций наилучшим, в определенном смысле, аппаратом приближения.

1. Наилучшее приближение сплайнами. Вот несколько общих задач с формулировкой известных автору точных результатов.

1. Найти $E(W_p^{r+1},\ S_{2n}^r)_q$ $(1 \leqq p, q \leqq \infty)$. Задача решена, насколько нам известно, в следующих двух случаях:

а) $p = \infty$, $1 \leqq q \leqq \infty$; б) $1 \leqq p \leqq \infty$, $q = 1$.

Случай а) рассмотрен в работах В. М. Тихомирова [1] и А. А. Женсыкбаева [2]. Используя аппарат интерполяционных сплайнов (см. ниже п. 2), они установили, что

$$E(W_M^{r+1},\ S_{2n}^r)_q = \|\varphi_{n,r+1}\|_q \ (1 \leqq q \leqq \infty), \tag{1}$$

где $\varphi_{ns}(t)$ — s-й периодический интеграл с нулевым средним значением от функции $\varphi_{n0}(t) = \operatorname{sign}\sin nt$. Заметим, что $\|\varphi_{ns}\|_C = K_s/n^s$, $\|\varphi_{ns}\|_L = 4K_{s+1}/n^s$, где K_s — известные константы Фавара:

$$K_s = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^{-s-1} (-1)^{k(s+1)};\ s = 0, 1, 2, \ldots .$$

При $q = \infty$ и $q = 1$ правая часть (1) дает $2n$- мерный поперечник (по Колмогорову) класса W_M^{r+1} соответственно в пространствах C и L (см. [3], с. 290), т. е. подпространство S_{2n}^r является экстремальным (наилучшим) для класса W_M^{r+1} в C и L.

Что касается случая б), то известен результат А. А. Лигуна [4]: $E(W_p^{r+1}, S_{2n}^r)_L = \|\varphi_{n,r+1}\|_{p'}$ $(1/p + 1/p' = 1)$, причем в случае $p = 1$ $(p' = \infty)$ сплайны S_{2n}^r реализуют $2n$ мерный поперечник класса W_L^{r+1} в пространстве L.

В работе [4] также отмечено, что при $q = \infty$ равенство (1) останется справедливым, если в нем S_{2n}^r заменить на S_{2n}^ν, где $\nu > r$, т. е. $E(W_M^{r+1}, S_{2n}^\nu)_C = K_{r+1}/n^{r+1}$; $\nu = r, r+1, \ldots$.

2. Задача отыскания точных значений величин $E(W^r H_p^\omega,\ S_{2n}^r)_q$ сложнее и требует более тонких методов. Известные нам точные результаты относятся к классам $W^r H^\omega$, задаваемым мажорантой равномерного модуля непрерывности. Автором доказано [5] (см. также

[3], с. 295), [6], что если мажоранта $\omega(\delta)$ выпукла вверх, то при всех $n=1, 2, \ldots$ и $r=0, 1, 2, \ldots$

$$E(W^rH^\omega,\ S^r_{2n})_X=\|f_{nr}\|_X, \tag{2}$$

где X есть C или L, а $f_{nr}(t)$ — r-й периодический интеграл с нулевым средним значением от функции

$$f_{n0}(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\,\omega(2t)\ (0\leq t\leq\pi/2n),\\ \frac{1}{2}\,\omega(2\pi/n-2t)\ \ (\pi/2n\leq t\leq\pi/n),\end{cases}$$

$$f_{n0}(-t)=-f_{n0}(t),\ f_{n0}(t+2\pi/n)=f_{n0}(t).$$

Установлено также, что в пространстве C подпространство сплайнов S^r_{2n} реализует $2n$-мерный поперечник класса W^rH^ω.

При $X=L_q(1<q<\infty)$ равенство (2) доказано пока лишь в случаях $r=0$ [7] и $r=1$ (см. ниже п. 2), хотя, по-видимому, оно верно при $X=L_q$ для всех $r=0, 1, 2\ldots$.

Для классов $W^rH^\omega_p(1\leq p<\infty)$, задаваемых мажорантой интегрального модуля непрерывности $\omega(f,\delta)_{L_p}$, точные резултаты наилучшего приближения сплайнами из S^r_{2n} автору неизвестны.

3. Неравенства Джексона. Задачу можно ставить очень обще: найти

$$\sup\{E(f,\ S^r_{2n})_q/\omega(f^{(r)},\ \pi/n)_X\colon f\in X^r,\ f\neq\mathrm{const}\}\quad(1\leq q\leq\infty).$$

(X есть C или L_p), т. е. в неравенстве $E(f,\ S^r_{2n})_q\leq A(X, q, r, n)\,\omega(f^{(r)}, \pi/n)_X$ ($f\in X^r$) указать точное выражение для величины $A(X, q, r, n)$. И здесь решение найдено в отдельных случаях лишь при $X=C$.

Используя соотношения двойственности С. М. Никольского ([3], с. 39), нетрудно показать, что для любой функции $f\in C^r$

$$E(f,S^r_{2n})_q\leq\frac{1}{2}\,\omega(f^{(r)},\pi/n)\sup\{\|g\|_L\colon g\in W^r_{q'}(S^r_{2n})\,(1/q+1/q'=1)\}, \tag{3}$$

где $W^s_p(S^r_{2n})=\{f\colon f\in W^s_p,\ f^{(s)}\perp S^r_{2n}\}$ (ортогональность $\varphi\perp\psi$ понимается как $\int_0^{2\pi}\varphi(t)\psi(t)dt=0$). Верхняя грань в правой части (3) вычислена при $q'=1$ и $q'=\infty$, так что справедливы следующие утверждения: для любой $f\in C^r$ имеют место неравенства

$$E(f,S^r_{2n})_C\leq\frac{1}{2}\,K_rn^{-r}\omega(f^{(r)},\ \pi/n), \tag{4}$$

$$E(f,S^r_{2n})_L\leq 2K_{r+1}\,n^{-r}\omega(f^{(r)},\pi/n);\ n=1, 2, \ldots,\ r=0, 1, \ldots, \tag{5}$$

константы в которых являются точными. Соотношение (4) получено А. А. Лигуном [4].

Интересно, что подпространство S^r_{2n} является наилучшим для множества C^r в смысле неравенства Джексона в метрике C, т. е. для любого подпространства F_{2n} (размерности $2n$) из C будет

$$\sup\{n^rE(f,F_{2n})_C/\omega(f^{(r)},\pi/n)\colon f\in C^r,\ f\neq\mathrm{const}\}$$
$$\geq\sup\{n^rE(f,S^r_{n2})_C/\omega(f^{(r)},\pi/n)\colon f\in C^r,\ f\neq\mathrm{const}\}.$$

4. Оценка наилучшего приближения функции через наилучшее приближение ее k-й производной. Соотношения двойственности позволяют получить также следующий результат: если $1\leqq k\leqq r$, то для $f\in L_q^k$ справедливо неравенство

$$(6)\qquad E(f, S_{2n}^r)_p\leqq \sup\{\|g\|_{q'}E(f^{(k)}, S_{2n}^{r-k})_q : g\in W_{p'}^k(S_{2n}^r)\};$$

$$1/p+1/p'=1/q+1/q'=1.$$

При $p'=\infty$ верхняя грань в правой части (6) равна $\|\varphi_{nk}\|_{q'}$ и, таким образом, $\forall f\in L_q^k$

$$(7)\qquad E(f, S_{2n}^r)_L\leqq\|\varphi_{nk}\|_{q'}E(f^{(k)}, S_{2n}^{r-k})_q\,(1/q+1/q'=1).$$

Эта оценка на множестве L_q^k неулучшаема, причем при $q>1$ существует функция $f\in L_q^k$, для которой в (7) имеет место знак равенства.

2. Приближение интерполяционными сплайнами. Для любой функции $f\in C$ существует, и притом единственный, сплайн $\sigma_{nr}(f,t)\in S_{2n}^r$ такой, что

$$\sigma_{nr}(f, x_k)=f(x_k)\ (k=0,1,\ldots, 2n-1),$$

где

$$x_k=x_k^n=\begin{cases} k\pi/n, & r \text{ — нечетно,}\\ k\pi/n+\pi/2n, & r \text{ — четно}\end{cases}$$

(см., например, [3], с. 287). Если (при фиксированных n и r) $s_i(t)$ — фундаментальные сплайны из S_{2n}^r, т. е. такие, что $s_i(x_k)=\delta_{ik}$, то $\sigma_{nr}(f,t)=\sum_{k=0}^{2n-1}f(x_k)\,s_k(t)$, т. е. интерполяционные сплайны $\sigma_{nr}(f,t)$ доставляют линейный метод приближения.

В случае аппроксимации сплайнами $\sigma_{nr}(f,t)$ естественно рассмотреть задачи, аналогичные тем, которые были сформулированы в п. 2 для наилучшего приближения. Замечательным является тот факт, что в ряде важных случаев погрешность приближения интерполяционными сплайнами на классе функций не превосходит погрешности наилучшего приближения подпространством S_{2n}^r, которая, в свою очередь, как отмечалось выше, совпадает с поперечником данного класса. Это означает, что сплайны $\sigma_{nr}(f,t)$ представляют в этих случаях наилучший (и притом линейный) аппарат приближения (при данной размерности) для рассматриваемого класса функций.

В задаче отыскания величины $\sup\{\|f-\sigma_{nr}(f)\|_q : f\in W_p^{r+1}\}$, как и в случае наилучшего приближения, известны два точных результата:

$$(8)\qquad \sup\{\|f-\sigma_{nr}(f)\|_q :\ f\in W_M^{r+1}\}=\|\varphi_{n,r+1}\|_q(1\leqq q\leqq\infty),$$

$$(9)\qquad \sup\{\|f-\sigma_{nr}(f)\|_L : f\in W_p^{r+1}\}=\|\varphi_{n,r+1}\|_{p'}\ (1\leqq p<\infty,\ 1/p+1/p'=1),$$

первый из которых получен В. М. Тихомировым ($q=\infty$) [1] и А. А. Женсыкбаевым [2], а второй — автором [8]. Заметим, что имеет место более сильное, чем (8), соотношение ([2], [3], с. 288):

$$|f(t)-\sigma_{nr}(f,t)|\leqq|\varphi_{n,r+1}(t)|\quad \forall f\in W_M^{r+1}.$$

В (8) при $q=\infty$ и $q=1$, а в (9) при $p=1(p'=\infty)$ реализуется поперечник класса W_M^{r+1} в C и L, соответственно класса W_L^{r+1} в L.

Что касается вычисления верхних граней приближения сплайнами $\sigma_{nr}(f, t)$ на классах, задаваемых мажорантой модуля непрерывности, то здесь точных результатов почти нет. Не считая почти тривиально получаемого соотношения $\sup\{\|f-\sigma_{n0}(f)\|_q : f\in H^\omega\}=(4n\int_0^{\pi/2n}\omega^q(t)dt)^{1/q}$, автор может привести еще равенство $\sup\{\|f-\sigma_{n1}(f)\|_q : f\in W^1H^\omega\}=\|f_{n1}\|_q$ ($1\leqq q\leqq\infty$) (при условии выпуклости $\omega(\delta)$) и высказать гипотезу, что, по крайней мере, при $q=1$ аналогичное равенство справедливо и для классов $W^rH^\omega (r=2, 3, 4, \ldots)$. С другой стороны, автором [5], [9] и А. А. Женсыкбаевым [10] установлено, что если $\omega(\delta)$ выпукла вверх и нелинейна на $[0, \pi/n]$, то при $r\neq 1$

$$\sup\{\|f-\sigma_{nr}(f)\|_C : f\in W^rH^\omega\}>E(W^rH^\omega, S_{2n}^r)_C=\|f_{nr}\|_C.$$

В задаче о неравенствах Джексона для интерполяционных сплайнов имеет место следующий точный результат: если $f\in C^r$, то

$$\|f-\sigma_{nr}(f)\|_L\leqq n^{-r}2K_{r+1}\,\omega(f^{(r)}, \pi/n);\quad n=1, 2, \ldots,\ r=0, 1, \ldots, \tag{10}$$

причем константа в правой части уменьшена быть не может. Сравнивая (5) и (10), видим, что в метрике L интерполяционные сплайны дают на множестве C^r ту же константу в неравенстве Джексона, что и наилучшее приближение подпространством S_{2n}^r.

Отметим еще, что для любой функции $f\in C^1$ справедливы следующие неулучшаемые оценки:

$$\|f-\sigma_{n1}(f)\|_q\leqq(2\pi/(q+1))^{1/q}(\pi/4n)\omega(f', \pi/n);\quad 1\leqq q<\infty,$$
$$\|f-\sigma_{n1}(f)\|_C\leqq(\pi/4n)\omega(f', \pi/n).$$

3. Одновременное приближение интерполяционным сплайном функции и ее производных. Речь идет о точной оценке величин $\|f^{(k)}-\sigma_{nr}^{(k)}(f)\|_q$; $r=1, 2, \ldots$; $1\leqq k<r$, на классах функций. Здесь можно привести лишь один, на наш взгляд, интересный результат:

$$\sup\{\|f'-\sigma_{nr}'(f)\|_L : f\in W_M^{r+1}\}=\|\varphi_{nr}\|_L=E(W_M^r, S_{2n}^{r-1})_L=n^{-r}4K_{r+1}.$$

Таким образом, интерполяционные сплайны $\sigma_{nr}(f, t)$ не только дают наилучшую аппроксимацию класса W_M^{r+1} в метриках C и L, но их производные $\sigma_{nr}'(f, t)$ наилучшим образом приближают в метрике L производную f' (на всем классе W_M^{r+1}). По-видимому, этот факт имеет место (в метрике L!) также и на классе W^rH^ω, если $\omega(\delta)$ — выпукла вверх.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Тихомиров. Наилучшие методы приближения и интерполирования дифференцируемых функций в пространстве $C[-1,1]$. *Матем. сб.*, 80, 1969, № 2, 290—304.
2. А. А. Женсыкбаев. Приближение дифференцируемых периодических функций сплайнами по равномерному разбиению. *Матем. заметки*, 13, 1973, № 6, 807—816.
3. Н. П. Корнейчук. Экстремальные задачи теории приближения. Москва, 1976.
4. A. A. Ligun. Inequalities for upper bounds of functionals. *Analysis Math.*, 2, 1976, No. 1, 11—40.

5. Н. П. Корнейчук. О равномерном приближении периодических функций подпространствами конечной размерности. *Доклады АН СССР*, **213**, 1973, № 3, 525—528.
6. Н. П. Корнейчук. Наилучшее приближение сплайнами на классах периодических функций в метрике L. *Матем. заметки*, **20**, 1976, № 5, 655—664.
7. Н. П. Корнейчук. О поперечниках классов непрерывных функций в пространстве L_p. *Матем. заметки*, **10**, 1971, № 5, 493—500.
8. N. P. Korneičuk. Exact error bound of approximation by interpolating splines in L-metric on the classes W_p^r $(1 \leqq p < \infty)$ of periodc functions. *Analysis Math.*, **3**, 1977, No. 2, 109—117.
9. N. P. Korneičuk. On extremal subspaces and approximation of periodic functions by splines of minimal defect. *Analysis Math.*, **1**, 1975, No. 2, 91—101.
10. А. А. Женсыкбаев. Сплайн-интерполяция и наилучшее приближение тригонометрическими многочлемани. *Матем. заметки*, **26**, 1979, № 3, 355—366.

Институт математики АН УССР
Киев

Получено 10. 10. 1977