КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'77
София . 1980, с. 105—107

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'77
Sofia . 1980, p. 105—107

НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА МЕЖДУ НАИЛУЧШИМИ ПРИБЛИЖЕНИЯМИ И МОДУЛЯМИ НЕПРЕРЫВНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ L_2

А. А. Лигун

Резюме. В докладе приводятся некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности периодических дифференцируемых функций в пространстве L_2. В частности здесь приводится следующее соотношение:

$$(1/2n^r)\sqrt{1+2^{-2r-2}}\leqq \varkappa_{n,\,r,\,1}(2)\leqq(1/2n^r)\sqrt{1+2^{-2r}}\,(n,\ r=1,2,\ldots),$$

где $\varkappa_{n,\,r,\,1}(2)=\sup\{E_{n-1}(f)_2/\omega_1(f^{(r)},\ \pi/n)_2\mid f^{(r)}\in L_2,\ f\neq\text{const}\}$ — точная константа в теореме Джексона для дифференцируемых периодических функций в пространстве L_2.

Пусть L_2 — пространство измеримых 2π-периодических функций $f(x)$ с конечной нормой $\|f\|_2=\{\pi^{-1}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2dx\}^{1/2}$, $L_2^{(r)}(r=0,1,2,\ldots,L_2^{(0)}=L_2)$ — множество всех функций $f(x)$, у которых $(r-1)$-ая производная $f^{(r-1)}(x)\,(f^{(0)}=f)$ абсолютно непрерывна и $f^{(r)}\in L_2$.

Определим, как обычно, p-й модуль непрерывности функции $f(x)$ равенством $\omega_p(f,h)_2=\sup\{\|\Delta_p(f,\cdot,t)\|_2:\ |t|\leqq h\}$, где

$$\Delta_p(f,x,t)=\sum_{\nu=0}^{p}(-1)^{p-\nu}C_p^\nu f(x+\nu t).$$

Если $s_{n-1}(f,x)$ — частичная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции

$$f(x)\sim a_0/2+\sum_{k=1}^{\infty}\varrho_k\cos(kx+\varphi_k),$$

$$s_{n-1}(f,x)=a_0/2+\sum_{k=1}^{n-1}\varrho_k\cos(kx+\varphi_k)$$

и $f_n(x)=f(x)-s_{n-1}(f,x)$, то положим $E_{n-1}(f)_2=\|f_n\|_2=\inf\{\|f-t_{n-1}\|_2:\ t_{n-1}\in T_{n-1}\}$, где T_n — множество тригонометрических полиномов порядка $\leqq n$.

Н. И. Черных [1, 2] доказал следующие соотношения

$$\sup\{n^rE_{n-1}(f)_2/\omega_1(f^{(r)},\pi/n)_2: f\in L_2^{(r)}, f\neq\text{const}\}=1/\sqrt{2}, \tag{1}$$

$$\sup\{n^{2r}E_{n-1}^2(f)_2/\int_0^\pi\omega_1^2(f^{(r)},t/n)_2\sin t\,dt:\ f\in L_2^{(r)}, f\neq\text{const}\}=1/4. \tag{2}$$

Аналогичные соотношения получены им и для p-х модулей непрерывности. В работе Л. В. Тайкова [3] доказано, что для $r>0$ и $0<h<3\pi(4n)^{-1}$ справедливо равенство

$$\sup n^{2r}E_{n-1}(f)_2/\int_0^h\omega_1^2(f^{(r)},t)_2dt:\ f\in L_2^{(r)}, f\neq\text{const}\}=n/2(nh-\sin nh). \tag{3}$$

Мы даем одно обобщение равенств (2) и (3), которое приводит к уточнению оценки сверху константы в теореме Джексона для дифференцируемых функций в пространстве L_2.

Теорема 1. *Пусть* $n, p=1, 2, \ldots, r>0$, $0<h<\pi n^{-1}$ *и* $\psi(t)\geqq 0 (0\leqq t\leqq h)$. *Тогда*

$$(4)\qquad 1/B_{n,h}^{r,p}(\psi)\leqq \sup\{E_{n-1}^2(f)_2/\int_0^h\omega_p^2(f^{(r)}, t)_2\psi(t)dt:\ f\in L_2^{(r)}, f\neq \mathrm{const}\}$$
$$\leqq 1/\inf\{B_{k,h}^{r,p}(\psi):\ n\leqq k\},$$

где

$$B_{k,h}^{r,p}(\psi)=2^p k^{2r}\int_0^h(1-\cos kt)^p\psi(t)dt.$$

Для приближения функций на всей оси соотношения, аналогичные неравенствам (4), получены В. Ю. Поповым в работе [4].

Доказательство. Положим $\Delta_p(f, t)_2=\|\Delta_p(f, \cdot, t)\|_2$. Так как $\Delta_p^2(f^{(r)}, t)_2=2^p\sum_{k=1}^\infty\varrho_k^2k^{2r}(1-\cos kt)$, то для любой функции $f(x)\in L_2^{(r)}$ справедливы соотношения

$$E_{n-1}^2(f)_2=\|f_n\|_2^2=\sum_{k=n}^\infty\varrho_k^2$$
$$=\sum_{k=n}^\infty 2^p\varrho_k^2k^{2r}\int_0^h(1-\cos kt)^p\psi(t)dt/2^p\varrho_k^2k^{2r}\int_0^h(1-\cos kt)\psi(t)dt$$
$$\leqq\{\inf_{n\leqq k}B_{k,h}^{r,p}(\psi)\}^{-1}\int_0^h(\sum_{k=n}^\infty\varrho_k^2 2^pk^{2r}(1-\cos kt)^p)\psi(t)dt$$
$$\leqq\{\inf_{n\leqq k}B_{k,h}^{r,p}(\psi)\}^{-1}\int_0^h\omega_p^2(f^{(r)}, t)_2\psi(t)dt.$$

Оценка сверху получена. Оценку снизу даёт функция $f(x)=\cos nx$.

Следствие 1. Пусть $n, p=1, 2, \ldots, r\geqq 0$ и $\theta(t)\geqq 0 (0<t<a<\pi)$ Тогда

$$2^{-p}/\Phi_{r,p}(a, \theta, 1)\leqq \sup\{n^{2r}E_{n-1}^2(f)_2/\int_0^a\omega_p^2(f^{(r)}, t/n)\theta(t)dt:\ f\in L_2^{(r)}, f\neq\mathrm{const}\}$$
$$\leqq 2^{-p}/\inf\{\Phi_{r,p}(a, \theta, y):\ y\geqq 1\},$$

где

$$\Phi_{r,p}(a, \theta, y)=y^{2r}\int_0^a(1-\cos yt)^p\theta(t)dt.$$

Замечание. В частности, если $\theta(t)=t^{2r-1}\varphi(t)$ $(0\leqq t\leqq a)$ и функция $\varphi(t)$ не возрастает на $(0, a)$, то

$$\inf_{y\geqq 1}\Phi_{r,p}(a, t^{2r-1}\varphi(t), y)=\Phi_{r,p}(a, t^{2r-1}\varphi(t), 1).$$

Положим

$$\chi_{n,r,p}(2)=\sup\{n^rE_{n-1}(f)_2/\omega_p(f^{(r)}, \pi/n)_2:\ f\in L_2^{(r)}, f\neq\mathrm{const}\}.$$

Ясно, что $\chi_{n,r,p}(2)$ есть точная константа в теореме Джексона для дифференцируемых периодических функций в пространстве L_2. Как мы уже отмечали выше, величины $\chi_{n,r,p}(2)$ при $r=0$ вычислены в работе Н. И. Черных [1].

Из следствия 1 вытекает неравенство

$$2^p\chi^2_{n,r,p}(2)\leqq \inf_{\theta(t)\geqq 0}\int_0^\pi\theta(t)dt/\inf\{\Phi_{r,p}(\pi,\theta,y):\ y\geqq 1\}.$$

Лемма 1. *Пусть* $n=1,2,\ldots$ *и* $r>0$. *Тогда*

$$\chi^2_{n,r,1}(2)\geqq(1+2^{-2r-2})/4.$$

Лемма 2. *Пусть* $r=1,2,\ldots,\delta_1=0{,}39\pi$, $\delta_r(0<\delta_r<\pi/2, r=2,3,\ldots)$ — *корень уравнения* $2^{2r}(x-\sin x)=x+\sin x$ *и*

$$\theta_r(t)=\begin{cases}0 & (t\in[0,\pi-\delta_r),\\ 1 & (t\in[\pi-\delta_r,\pi]).\end{cases}$$

Тогда $\Phi_{r,1}(\pi,\theta_r,y)\geqq\Phi_{r,1}(\pi,\theta_r,1)=\delta_r+\sin\delta_r(y\geqq 1)$.

Из лемм 1 и 2 и из неравенства (5) вытекает

Следствие 2. Пусть $n, r=1,2,\ldots$. Тогда

$$(1+2^{-2r-2})/4\leqq\chi^2_{n,r,1}(2)\leqq(1+2^{-2r})/4.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Черных. О неравенстве Джексона в L_2. *Труды Матем. ин-та АН СССР*, 88, 1967, 71—74.
2. Н. И. Черных. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2. *Матем. заметки*, 2, 1967, № 5, 513—522.
3. Л. В. Тайков. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модули непрерывности из L_2. *Матем. заметки*, 20, 1976, № 3, 433—438.
4. В. Ю. Попов. Прямые и обратные неравенства для „φ-Фейеровских“ среднеквадратических приближений. *Матем. заметки*, 19, 1976, № 3, 353—364.

Днепродзержинский индустриальный институт
Днепродзержинск *СССР*

Получено 14. 7. 1977.