КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'77
София . 1980, с. 109—110

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'77
Sofia . 1980, p. 109—110

ВЕРХНЯЯ ГРАНЬ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ

С. Милорадович

Пусть f непрерывная 2π-периодическая функция и пусть $a_n(f)$ и $b_n(f)$ ее коэффициенты Фурье. Пусть X — заданный класс функций. Проблемой вычисления верхних граней

$$(1)\qquad \sup\{a_n(f): f\in X\},\quad \sup\{b_n(f): f\in X\}$$

занимались А. Лебег [1], А. Ефимов [2] и другие авторы.

Пусть $H_1(\delta_0)$ класс тех функций f из C, чьи модули непрерывности удовлетворяют условию $\omega(f, \delta_0)\leqq 1$, где δ_0 — зафиксированное число из интервала $(0, +\infty)$. Через $W^rH_1(\delta_0)$ обозначим класс тех функций f, для которых $f^{(r)}\in H_1(\delta_0)$.

Для класса $H_1(\pi/n)$ А. Лебег [1] доказал, что величины (1) равны $2/\pi$. С. Б. Стечкин поставил задачу вычислить величины (1) для любого $\delta_0>0$. Решение задачи дает:

Теорема 1. *Если $f\in H_1(\delta_0)$, тогда*

$$\sup_f a_n(f)=\sup_f b_n(f)=\begin{cases} 2\sin n(s+1/2)\delta_0/\pi\sin(n\delta_0/2), \\ 2\pi/n(4s+3)\leqq\delta_0\leqq 2\pi/n(4s+1),\ s=1,2,\ldots, \\ 2\sin ns\delta_0/\pi\sin(n\delta_0/2), \\ 2\pi/n(4s+1)\leqq\delta_0\leqq 2\pi/n(4s-1),\ s=1,2,\ldots, \\ 2/\pi,\ \delta_0\geqq 2\pi/3n. \end{cases}$$

Доказательство этой теоремы существенно различается от доказательства Лебега для $\delta_0=\pi/n$. Из нее получается асимптотическая формула, как

Следствие 1. При $\delta_0\to 0$

$$\sup\{a_n(f): \omega(f, \delta_0)\leqq 1\}=\sup\{b_n(f): \omega(f, \delta_0)\leqq 1\}\simeq 4/\pi n\delta_0.$$

Аналогично теореме 1 и следствию 1 можем доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Если* $f \in W^r H_1(\delta_0)$, *тогда*

$$\sup_f a_n(f) = \sup_f b_n(f) = \begin{cases} 2 \sin n(s+1/2)\delta_0/\pi n^r \sin(n\delta_0/2), \\ 2\pi/n(4s+3) \leqq \delta_0 \leqq 2\pi/n(4s+1), \; s=1, 2, \dots, \\ 2 \sin ns\delta_0/\pi n^r \sin(n\delta_0/2), \\ 2\pi/n(4s+1) \leqq \delta_0 \leqq 2\pi/n(4s-1), \; s=1, 2, \dots, \\ 2/\pi n^r, \; \delta_0 \geqq 2\pi/3n. \end{cases}$$

Следствие 2. При $\delta_0 \to 0$

$$\sup \{a_n(f): \omega(f^{(\varepsilon)}, \delta_0) \leqq 1\} = \sup \{b_n(f): \omega(f^{(\varepsilon)}, \delta_0) \leqq 1\} \simeq 4/\pi n^{r+1}\delta_0.$$

Результаты теоремы 1 и теоремы 2 можем применить к теореме 9 А. Ефимова в [4].

Пользуюсь случаем поблагодарить С. Б. Стечкина, который внимательно относился к моей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Lebesgue. Sur la représentation trigonométrique appreciée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz. *Bull. Soc. Math. France*, 38, 1910, 184—210.
2. А. В. Ефимов. О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и суммами Фейера. *Известия АН СССР, серия мат.*, 22, 1958, 81—116.
3. А. В. Ефимов. О коэффициентах Фурье функций класса H_2^1. *Успехи мат. наук*, 12, 1957, № 3, 303—311.
4. А. В. Ефимов. Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье. *Известия АН СССР, сер. мат.*, 24, 1960, 243—299.

Саобраћајни факультет
Таковска 34, Белград, СФРЮ

Получено 5. 9. 1977.