КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'77
София, 1980, с. 111—120

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'77
Sofia, 1980, p. 111—120

РАЦИОНАЛЬНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО РАВНОМЕРНОЙ, ХАУСДОРФОВОЙ И ИНТЕГРАЛЬНОЙ МЕТРИК

П. П. Петрушев

Резюме. В этой статье сделаем обзор некоторых результатов, связанных с задачами о нахождении точных по порядку оценок сверху для наилучших рациональных приближений функций различных классов функций действительного переменного относительно разных метрик. Началом и стимулом для получения этих результатов послужила работа В. А. Попова [1].

Определения и обозначения. Как обычно, полагаем

$$\|f\|_{C[a,b]}=\sup\{|f(x)|: x\in[a,b]\},\quad \|f\|_{L_p[a,b]}=\Big(\int_a^b |f(x)|^p dx\Big)^{1/p}.$$

Обозначим через $F_{[a,b]}$ множество всех замкнутых и ограниченных точечных множеств на плоскости, которые выпуклы относительно оси y и проекция которых на оси x совпадает с интервалом $[a, b]$ (см. [2]). Хаусдорфовое расстояние с параметром α между множествами $F, G\in F_{[a,b]}$ определяется через

$$r(\alpha,[a,b];F,G)=\max\Big\{\max_{A\in F}\min_{B\in G} d_\alpha(A,B), \max_{A\in G}\min_{B\in F} d_\alpha(A,B)\Big\},$$

где $d_\alpha(A,B)=d_\alpha(A(a_1,a_2),B(b_1,b_2))=\max\{\alpha^{-1}|a_1-b_1|, |a_2-b_2|\}$, $\alpha>0$.

Дополненный график $\bar f$ ограниченной на отрезке $[a, b]$ функции f определяется через $\bar f=\{\cap F: F\in F_{[a,b]}$ и $(x, f(x))\in F$ при $x\in[a, b]\}$. Отметим, что для любой ограниченной на отрезке $[a, b]$ функции f имеем $\bar f\in F_{[a,b]}$.

Хаусдорфовое расстояние с параметром α между двумя ограниченными на $[a, b]$ функциями f и g определяется как хаусдорфовое расстояние между их дополненными графиками, т. е. $r(\alpha,[a,b];f,g)=r(\alpha,[a,b];\bar f,\bar g)$.

В этой статье рассматриваем только хаусдорфовое расстояние с параметром $\alpha=1$. Свойства и особенности хаусдорфова расстояния обсуждаются подробно в [2].

Обозначим через H_n, как обычно, множество всех алгебраических полиномов n-той степени, а через R_n — множество всех рациональных функций n-той степени, т. е. $R_n=\{q: q=p_1/p_2,\ p_1, p_2\in H_n\}$.

Обозначим еще через $E_n(f)_\Omega = E_n(f, [a, b])_\Omega$ и $R_n(f)_\Omega = R_n(f, [a, b])_\Omega$, $\Omega = C, r, L_p$ наилучшие приближения функции f (множества f) элементами соответствено из H_n и R_n относительно равномерной, хаусдорфовой и L_p метрик. Например, $R_n(f, [a, b])_C = \inf\{\|f-q\|_{C_{[a,b]}} : q \in R_n\}$, $R_n(f, [a, b])_r = \inf\{r(1, [a, b]; f, q) : q \in R_n\}$, $R_n(f, [a, b])_{L_p} = \inf\{\|f-q\|_{L_p[a,b]} : q \in R_n\}$.

Будем рассматривать задачи следующего типа:

Задача 1. Если X некоторое непустое множество функций действительного переменного, то найти универсальную для всех функций $f \in X$ оценку сверху для $R_n(f)_\Omega$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, где $\Omega = c \vee r \vee L_p$, которая точна по порядку на множестве X.

Пусть φ некоторая положительная функция натурального аргумента и $\varphi(n) \searrow 0$ при $n \to \infty$. Будем говорить, что оценка $R_n(f)_\Omega = O(\varphi(n))$ ($R_n(f)_\Omega \leqq C_1\varphi(n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$) точна по порядку на множестве X, если существуют функция $f \in X$, положительная константа C_2 и последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ такие, что $R_{n_i}(f)_\Omega > C_2\varphi(n_i)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$

Будем считать, что оценка $R_n(f)_\Omega = o(\varphi(n))$ ($R_n(f)_\Omega \leqq \delta_n(f) . \varphi(n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, где последовательность $\delta_n(f)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ зависит от f и $\delta_n(f) \searrow 0$ при $n \to \infty$) точна по порядку на множестве X, если для любой последовательности ε_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, $\varepsilon_n \searrow 0$ при $n \to \infty$, существуют функция $f \in X$ и последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ такие, что $R_{n_i}(f)_\Omega > \varepsilon_{n_i}\varphi(n_i)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$

Иногда, вместо задачи 1, будем рассматривать следующую более простую задачу.

Задача 2. Если X некоторое непустое множество функций действительного переменного, то найти точную по порядку оценку сверху для $\sup\{R_n(f)_\Omega : f \in X\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Будем говорить, что оценка $\sup\{R_n(f)_\Omega : f \in X\} = O(\varphi(n))$ точна по порядку, если существуют положительная константа C_1 и последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ такие, что $\sup\{R_{n_i}(f)_\Omega : f \in X\} > C_1\varphi(n_i)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$

Задачи 1 и 2 близки, но, как увидим, часто случается, что для некоторого множества функций X имеет место точная по порядку оценка $\sup\{R_n(f)_\Omega : f \in X\} = O(\varphi(n))$, а для любой функции $f \in X$ справедлива оценка $R_n(f)_\Omega = o(\varphi(n))$.

Интерес к теории рациональных аппроксимаций функций действительного переменного увеличился вследствие замечательного результата Д. Нюмана [3]:

$$R_n(|x|, [-1, 1])_C = O(e^{-C_1\sqrt{n}}), \tag{1}$$

где C_1 положительная константа.

Отметим, что для получения оценки (1) Д. Нюман на самом деле использовал, что

$$R_n(\operatorname{sgn} x, [-1, 1])_r = O(e^{-C_1\sqrt{n}}), \tag{2}$$

где $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{при } x \in [-1, 0), \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ 1 & \text{при } x \in (0, 1]. \end{cases}$ Из оценки (2) легко получается оценка (1).

Впоследствии оказалось, что оценки типа (2) (см. [4]) более удобны для применения, чем оценки (1).

После результата Д. Нюмана были найдены различные классы функций, для которых порядок наилучших рациональных приближений относительно равномерной или хаусдорфовой метрик лучше, чем порядок соответствующих полиномиальных приближений.

Основной класс функций в теории равномерных рациональных аппроксимаций является класс V_r всех функций f, для которых $f^{(r-1)}$ — абсолютно непрерывна на $[a, b]$ и является первообразной некоторой функции $f^{(r)}$ с ограниченной вариации на интервале $[a,b]$ $(V_a^b f^{(r)} < \infty)$.

П. Туран и П. Сюс [5] рассмотрели класс V_1 и доказали, что $\sup\{R_n(f)_C:\ V_a^b f' \leqq M\} = O(\ln^4 n/n^2)$.

Г. Фройд [6] улучшил и обобщил эту оценку следующим образом:

$$\sup\{R_n(f)_C:\ V_a^b f^{(r)} \leqq M\} = O(\ln^2 n/n^{r+1})\ (r \geqq 1).$$

С другой стороны, легко видно [7], что порядок $\sup\{R_n(f)_C:\ V_0^1 f^{(r)} \leqq 1\}$ не может быть лучше, чем $O(n^{-r-1})$.

Проблема о нахождении точной по порядку оценки сверху для $\sup\{R_n(f)_C:\ V_a^b f^{(r)} \leqq M\}$, $n = 1, 2, \ldots (r \geqq 1)$ была решена В. А. Поповым [1]:

Теорема А. *Справедлива оценка*

$$\sup\{R_n(f)_C:\ V_a^b f^{(r)} \leqq M\} \leqq C_r M (b-a)^r n^{-r-1},\ n = r,\ r+1, \ldots\ (r \geqq 1), \tag{3}$$

где C_r зависит только от r и, как уже отметили, оценка (3) *точна по порядку.*

Отметим две следствия из теоремы А [1]:

Следствие А. Для любой функции $f \in \mathrm{Lip}\,1$ имеет место оценка

$$R_n(f, [0, 1])_C = o(n^{-1}), \tag{4}$$

но $\sup\{R_n(f, [0, 1])_C:\ f \in \mathrm{Lip}_H 1\} = O(n^{-1})\ (H > 0)$ и обе оценки точны по порядку.

Следствие Б. Справедлива оценка

$$\sup\{R_n(f)_r:\ V_0^1 f \leqq 1\} = O(n^{-1}), \tag{5}$$

и эта оценка точна по порядку.

1. О базисной для равномерных рациональных аппроксимаций оценке В. А. Попова (теорема А).

Теорема 1. *Для любой функции f такой, что $f^{(r)}$ — абсолютно непрерывна на $[a, b]$, имеем:*

$$R_n(f)_C = o(n^{-r-1});\ r \geqq 1, \tag{6}$$

и эта оценка точна по порядку в рассматриваемом классе функций.

Нам пока неизвестно, имеет ли место оценка (6) для каждой функции из класса V_r.

Будем пользоваться следующей характеристикой:

$$\varkappa(f;\ n) = \sup\Big\{\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| :\ 0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n \leqq 1\Big\},\ n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{7}$$

введенной В. А. Поповым [8] (подобная характеристика была использована и З. А. Чантурием [9]).

Отметим, что $\varkappa(f;\ n) \leqq V_0^1 f$, $\varkappa(f;\ n) \leqq 2n \| f \|_{C[0,\,1]}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Теорема 2 [10]. *Для любой функции f, для которой $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна на $[0, 1]$, имеем:*

$$R_n(f)_C \leqq C_r n^{-r-1} \cdot \varkappa(f^{(r)};\ n),\ n = 1, 2, 3, \ldots\ (r \geqq 1), \tag{8}$$

где C_r зависит только от r.

С другой стороны, в [8] показано, что для любой ограниченной на $[0, 1]$ функции f справедливо неравенство

$$\varkappa(f;\ n) \leqq 64 \cdot \sum_{k=0}^{n} R_k(f)_C,\ n = 1, 2, 3, \ldots \tag{9}$$

Из (8) и (9) получаем:

Следствие 1. Для любой функции f, для которой $f^{(r-1)}$ $(r \geqq 1)$ абсолютно непрерывна на $[0,1]$, имеем

$$R_n(f)_C \leqq C_r n^{-r-1} \sum_{k=0}^{n} R_k(f^{(r)})_C,\ n = r, r+1, \ldots, \tag{10}$$

где C_r зависит только от r.

В. А. Попов и Й. Сабадош [11] впервые нашли связь между $R_n(f)_C$ и $R_k(f^{(r)})_C$. Оценка (10) окончательно уточняет их результат.

2. Равномерные рациональные аппроксимации функций с ограниченной вариацией и заданным модулем непрерывности. Обозначим через $V([a, b], M, \omega)$ класс всех непрерывных на $[a, b]$ функций f, для которых $V_a^b f \leqq M$ и $\omega(f;\ \delta) \leqq \omega(\delta)$ при $\delta \geqq 0$, где $\omega(f;\ \delta) = \sup\{|f(x') - f(x'')| : |x' - x''| \leqq \delta,\ x', x'' \in [a, b]\}$ — модуль непрерывности функций f, ω — некоторый модуль непрерывности $(0 = \omega(0) = \omega(+0) \leqq \omega(\delta) \leqq \omega(\delta + \varepsilon) \leqq \omega(\delta) + \omega(\varepsilon)$, $\delta, \varepsilon \geqq 0)$.

В этой части для удобства потребуем еще, чтобы модули непрерывности ω строго возрастали на $[0, \infty)$ и $\lim_{\delta \to \infty} \omega(\delta) = \infty$. Этим не ограничивается общность наших утверждений. Тогда обратная функция ω^{-1} функции ω непрерывна и строго возрастает на $[0, \infty)$.

Из результатов Г. Фройда [6] и А. А. Абдугаппарова с Е. П. Долженко (доклад Е. П. Долженко на Московском конгрессе математиков в 1966 году) следует, что если функция f непрерывна на $[a, b]$, $V_a^b f < \infty$ и $\omega(f;\ \delta) \leqq H \cdot \delta^\alpha$ при $\delta \geqq 0$ $(H > 0,\ 0 < \alpha < 1)$, то

$$R_n(f)_C = O(\ln^2 n / n), \tag{11}$$

а если функция f непрерывна на $[a, b]$, $V_a^b f < \infty$ и $\omega(f;\ \delta) \leqq (\ln \delta^{-1})^{-1}$ при $0 < \delta < 1$, то

$$R_n(f)_C = O(n^{-1/3}). \tag{12}$$

А. П. Буланов [12] показал, что если $f \in V([a, b], M, \omega)$, то

$$R_n(f)_C / |\ln R_n(f)_C| \cdot |\ln \omega^{-1}(R_n(f)_C)| \leqq C n^{-1},\ n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{13}$$

где C зависит лишь от $b - a$, V и ω.

Используя неравенство (13), А. П. Буланов [12] улучшил оценку (12) следующим образом: если функция f непрерывна на $[a, b]$, $V_a^b f<\infty$ и $\omega(f; \delta) \leqq (\ln \delta^{-1})^{-1}$ при $0<\delta<1$, то

$$R_n(f)_C = O((\ln n/n)^{1/2}), \tag{14}$$

но оценка (14) не точна по порядку. Кроме того, используя (13), нельзя улучшить оценку (11).

Обозначим $(\ln)^m x = \underbrace{\ln \ln \cdots \ln}_{m} x$ и $(\exp)^m x = \underbrace{\exp\{\exp\{\cdots\{\exp}_{m} x\}\cdots\}\}$.

При помощи неравенства (13) в [12] доказано, что если функция f непрерывна на $[a, b]$, $V_a^b f<\infty$ и $\omega(f; \delta) \leqq ((\ln)^m \delta^{-1})^{-\gamma}$ при $0<\delta<((\exp)^{m-1} e)^{-1}$, где $\gamma>0$, $m \geqq 2$, то

$$R_n(f)_C = O(((\ln)^{m-1} n)^{-\gamma}), \tag{15}$$

и оценка (15) уже точна по порядку в рассматриваемом классе функций.

Справедливо следующее улучшение неравенства (13):

Теорема 3 [13]. *Для любого модуля непрерывности ω и любых $[a, b]$ и $M>0$ имеем*

$$R_n^\omega / \ln (C_1 R_n^\omega / \omega^{-1}(C_2 R_n^\omega)) \leqq C_3 . n^{-1}, \quad n=1, 2, 3, \ldots, \tag{16}$$

где $R_n^\omega = \sup\{R_n(f, [a, b])_C : f \in V([a, b], M, \omega)\}$, C_1, C_2, C_3 — положительные константы, зависящие лишь от $b-a$, M и $\omega(b-a)$ и $C_1 M/\omega^{-1}(C_2 M) \geqq 2e$, которое обеспечивает положительность знаменателя в левой части наравенства (16).

Имеет место следующая оценка снизу (эта оценка следует также из одной оценки снизу из [12]): для любого модуля непрерывности ω и любых $[a, b]$ и $M>0$ существуют положительные константы C_1^*, C_2^*, C_3^* и последовательность натуральных чисел $n_1<n_2<n_3<\cdots$ такие, что

$$R_{n_i}^\omega / \ln (C_1^* R_{n_i}^\omega / \omega^{-1}(C_2^* R_{n_i}^\omega)) > C_3^* . n_i^{-1}, \quad i=1, 2, 3, \ldots$$

Из последнего утверждения вытекает, что при помощи неравенства (16) можно получать точные по порядку оценки сверху для R_n^ω, $n=1, 2, 3, \ldots$ для всех $[a, b]$, M и ω. Приведем оценки для R_n^ω, которые следуют из теоремы 3, для некоторых конкретных модулей непрерывности ω.

Следствия 2 [13]. Справедливы оценки:

а) $\sup\{R_n(f)_C : f \in V_1\} = O(n^{-1})$, где $V_1 = \{f : V_a^b f \leqq M, \omega(f; \delta) \leqq H\delta$ при $\delta \geqq 0\}$, $M>0$, $H>0$.

б) $\sup\{R_n(f)_C : f \in V_2\} = O(\ln n/n)$, где $V_2 = \{f : V_a^b f \leqq M, \omega(f; \delta) \leqq H . \delta^\alpha$ при $\delta \geqq 0\}$, $M>0$, $H>0$, $0<\alpha<1$.

в) $\sup\{R_n(f)_C : f \in V_3\} = O(n^{-\gamma/(1+\gamma)})$, где $V_3 = \{f : V_a^b f \leqq M, \omega(f; \delta) \leqq H . (\ln \delta^{-1})^{-\gamma}$ при $0<\delta<1\}$, $M>0$, $H>0$, $\gamma>0$.

г) $\sup\{R_n(f)_C : f \in V_4\} = O(((\ln)^{m-1} n)^{-\gamma})$, где $V_4 = \{f : V_a^b f \leqq M, \omega(f; \delta) \leqq H((\ln)^m \delta^{-1})^{-\gamma}$ при $0<\delta<((\exp)^{m-1} e)^{-1}\}$, $M, H, \gamma>0$, $m \geqq 2$. Все эти оценки точны по порядку.

Нам до сих пор не известно решение задачи: найти точную по порядку оценку сверху для $R_n(f)_C$ при $f \in V([a, b], M, \omega)$, где ω — заданный модуль непрерывности. Такую задачу мы умеем решать для класса всех абсолютно непрерывных функций $f\in V([a, b], M, \omega)$:

Теорема 4. *Для любой абсолютно непрерывной функции $f\in V([a, b], M, \omega)$, где ω некоторый модуль непрерывности, $M>0$, существует последовательность $\varepsilon_n(f)$, $n=1, 2, 3, \ldots$, $\varepsilon_n(f)\searrow 0$ при $n\to\infty$ такая, что*

$$R_n(f)_C/\ln(C_1R_n(f)_C/\omega^{-1}(C_2R_n(f)_C))\leqq\varepsilon_n(f)\,.\,n^{-1},\ n=1, 2, 3, \ldots, \tag{17}$$

где C_1, C_2, C_3 — положительные константы, зависящие лишь от $b-a$, M и $\omega(b-a)$ и $C_1M/\omega^{-1}(C_2M)\geqq 2e$.

Неравенство (17) точно в следующем смысле (это вытекает также из [12]): для любого модуля непрерывности ω, любых $[a, b]$ и $M>0$ и любой последовательности ε_n, $n=1, 2, 3, \ldots$, $\varepsilon_n\searrow 0$ при $n\to\infty$, существуют абсолютно непрерывная функция $f\in V([a, b], M, \omega)$, положительные константы C_1^*, C_2^* и последовательность натуральных чисел $n_1<n_2<n_3<\cdots$ такие, что

$$R_{n_i}(f)_C/\ln(C_1^*R_{n_i}(f)_C/\omega^{-1}(C_2^*R_{n_i}(f)_C))>\varepsilon_{n_i}\,.\,n_i^{-1},\ i=1, 2, 3, \ldots$$

Из последнего утверждения следует, что при помощи неравенства (17) можно получать точные по порядку оценки сверху для $R_n(f)_C$ в классе всех абсолютно непрерывных функций $f\in V([a, b], M, \omega)$, для всех модулей непрерывности ω. Приведем соответствующие оценки для некоторых конкретных модулей непрерывности ω:

Следствия 3. Справедливи оценки:

а) Если $f\in\mathrm{Lip}\,1$, то $R_n(f)_C=o(n^{-1})$, т. е. из неравенства (17) следует оценка (4) (следствие А).

б) Если f — абсолютно непрерывна на $[a, b]$ и $\omega(f;\ \delta)\leqq H.\delta^\alpha$ при $\delta\geqq 0 (H>0,\ 0<\alpha<1)$, то $R_n(f)_C=o(\ln n/n)$.

в) Если f — абсолютно непрерывна на $[a, b]$ и $\omega(f;\ \delta)\leqq H(\ln\delta^{-1})^{-\gamma}$ при $0<\delta<1 (H>0, \gamma>0)$, то $R_n(f)_C=o(n^{-\gamma/(1+\gamma)})$.

г) Если f — абсолютно непрерывна на $[a, b]$ и $\omega(f;\ \delta)\leqq H((\ln)^m\delta^{-1})^{-\gamma}$ при $0<\delta<((\exp)^{m-1}e)^{-1}(H>0,\ \gamma>0,\ m\geqq 2)$, то $R_n(f)_C=O((\ln)^{m-1}n)^{-\gamma}$.

Все эти оценки точны по порядку в соответствующих классах функций.

Отметим, что утверждения теоремы 3 и теоремы 4 можно обобщить, заменяя условие для ограниченности вариации функции f через условие на порядок роста $\varkappa(f;\ n)$ при $n\to\infty$ (см. [13]).

3. Равномерные рациональные аппроксимации выпуклых функций, выпуклых функций класса $\mathrm{Lip}\,\alpha$ и функций с выпуклой производной. Обозначим через $\mathrm{Conv}\,[a, b]$ класс всех выпуклых и непрерывных на $[a, b]$ функций. А. П. Буланов [14] доказал, что если $f\in\mathrm{Conv}\,[a, b]$, то $R_n(f)_C=O(\ln^2 n/n)$.

С другой стороны, в [14] показано, что в классе $\mathrm{Conv}\,[a, b]$ порядок $R_n(f)_C$ не может быть лучше, чем $o(n^{-1})$.

Теорема 5 [15]. *Если $f\in\mathrm{Conv}\,[a, b]$, то*

$$R_n(f)_C=o(n^{-1}), \tag{18}$$

точнее $R_n(f)_C=O(\omega(f;\ 1/n)/n)$.

Оценка (18), как уже отметили, точна по порядку в классе $\mathrm{Conv}\,[a, b]$.

Обозначим через $\mathrm{Conv}\,([a, b], \alpha, H)$ класс всех выпуклых на отрезке $[a, b]$ функций f из класса $\mathrm{Lip}_H\,\alpha$ $(\omega(f;\ \delta)\leqq H.\delta^\alpha$ при $\delta\geqq 0)$, где $H>0$, $\alpha>0$.

А. П. Буланов [16] доказал, что если $f \in \mathrm{Conv}([a, b], \alpha, H)$, $0<\alpha<1$, то $R_n(f)_C = O(\ln^5 n/n^2)$.

А. Хатамов [17] улучшил этот результат следующим образом: если $f \in \mathrm{Conv}[a, b], \alpha, H)$, $0<\alpha<1$, то $R_n(f)_C \leq C_k (\ln)^k n/n^2$, $n>(\exp)^k e$, где k — произвольное натуральное число, C_k не зависит от n, но зависит от k.

С другой стороны, так как оценка (3) (теорема А) точна по порядку, то порядок $\sup\{R_n(f)_C : f \in \mathrm{Conv}([a, b], \alpha, H)\}$ не может быть лучше, чем $O(n^{-2})$.

Теорема 6 [18]. *Для любых* $[a, b]$, $\alpha \in (0, 1)$ *и* $H>0$ *имеем*

$$\sup\{R_n(f)_C : f \in \mathrm{Conv}([a, b], \alpha, H)\} = O(n^{-2})$$

и эта оценка точна по порядку.

Нам не известно, имеет ли место утверждение: если $f \in \mathrm{Conv}([a, b]\, \alpha, H)$, $0<\alpha<1$, то $R_n(f)_C = o(n^{-2})$.

Обозначим через $\mathrm{Conv}_r([a, b], M)$ $(r \geq 1, M>0)$ класс всех функций f таких, что $f^{(r)}$ выпукла на $[a, b]$ и $\|f^{(r)}\|_{C[a, b]} \leq M$.

А. А. Абдугаппаров [19] доказал, что если $f \in \mathrm{Conv}_r([a, b], M)$, то

$$R_n(f)_C = O(\ln^3 n/n^{r+1}); \quad r \geq 1.$$

А. Хатамов [20] и автор [18] улучшили эту оценку следующим образом: если $f \in \mathrm{Conv}_r([a, b], M)$, $r \geq 1$, то

$$R_n(f)_C \leq C_k (\ln)^k n/n^{r+1}, \quad n>(\exp)^k e,$$

где k — произвольное натуральное число, константа C_k зависит от k.

Теорема 7 [18]. *Для любых* $[a, b]$, $M>0$ *и* $r \geq 0$ *имеем*

$$\sup\{R_n(f)_C : f \in \mathrm{Conv}_r([a, b], M)\} = O(n^{-r-1}),$$

и эта оценка точна по порядку, так как оценка (3) *точна по порядку.*

Нам пока не известно, точен ли порядок $O(n^{-r-1})$ для $R_n(f)_C$, когда $f \in \mathrm{Conv}_r([a, b], M)$.

4. Рациональные аппроксимации в хаусдорфовой и интегральной метриках. Основной результат в теории хаусдорфовых аппроксимаций является следующая, доказанная Бл. Сендовым [2], [21], универсальная оценка для $E_n(f)_r$: для любого множества $f \in F_{[a, b]}$ справедливо

$$E_n(f)_r = O(\ln n/n). \tag{19}$$

Оценка (19) точна по порядку в классе всех абсолютно непрерывных функций [23]. Оценка (19) точна по порядку и для важных в теории хаусдорфовых аппроксимаций функций $\mathrm{sgn}\, x$ и

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \in [-1, 0) \cup (0, 1], \\ 1 & \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$$

Отметим, что для этих двух функций наилучшие хаусдорфовые рациональные приближения намного лучше: $R_2(\delta)_r = 0$, $R_n(\mathrm{sgn}\, x, [-1, 1])_r = O(e^{-C\sqrt{n}})$ (см. [2]).

С другой стороны, из (19) следует, что для любого множества $f \in F_{[a, b]}$ имеет место оценка

$$R_n(f, [a, b])_r = O(\ln n/n). \tag{20}$$

Бл. Сендов поставил проблему найти точный порядок убывания к нулю $R_n(f, [a, b])_r$ при $n \to \infty$ для множеств $f \in F_{[a, b]}$.

В этой части мы анонсируем ответ этой проблемы:

Теорема 8. *Оценка* (20) *точна по порядку в классе ограниченных на отрезке* [0,1] *функций.*

Это утверждение показывает, что на множестве всех ограниченных на [0, 1] функций в целом (тем более на множестве $F_{[0, 1]}$) рациональные функции и алгебраические полиномы, не смотря на эффекты для функций $\delta(x)$ и $\operatorname{sgn} x$, имеют одинаковые возможности как аппараты приближения в хаусдорфовой метрике.

В дальнейшем покажем, что для некоторых более узких классов функций наилучшие хаусдорфовые приближения рациональными функциями лучше по порядку, чем соответствующие приближения алгебраическими полиномами. Не ограничивая общность, сформулируем наши утверждения только для интервала [0,, 1].

Будем пользоваться характеристиками $\varkappa(f;\ n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ (см. [7]) и $\tau(f;\ \delta)_L = \int\limits_0^1 \omega(f;\ x;\ \delta)dx$, где $\omega(f;\ x;\ \delta) = \sup\{|f(t) - f(t')| : t, t' \in [x - \delta/2, x + \delta/2] \cap [0, 1]\}$, $\delta \geqq 0$ (см. [23]).

Отметим, что

$$(21) \qquad n \, . \, \tau(f;\ 1/n)_L \leqq C\varkappa(f;\ n) \leqq C \, . \, V_0^1 f, \; n = 1, 2, 3, \dots \text{ (см. [23])},$$

где C — абсолютная константа.

Теорема 9. *Для любой ограниченной на* [0, 1] *функции* f *имеем*

$$(22) \qquad R_n(f)_r \leqq C_1 \ln(e + n \, . \, \tau(f;\ 1/n)_L)/n, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где C_1 — *абсолютная константа.*

Из (21) и (22) следует, что для любой ограниченной на [0, 1] функции f имеем

$$(23) \qquad R_n(f)_r \leqq C_2 \ln(e + \varkappa(f;\ n))/n, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где C_2 — абсолютная константа.

Оценки (22), (23) обобщают оценки (5) и (20).

Ответ на вопрос, насколько оценки (22), (23) неулучшаемы, дается в следующем утверждении.

Теорема 10. *Оценки* (22), (23) *точны по порядку в классе функций с неограниченной вариацией, т. е.*

а) для любой функции $\tau(\delta)$, $\delta \geqq 0$ *такой, что* $\tau(\delta)/\delta \to \infty$ *при* $\delta \to 0$ *и* $\tau(\delta) = \tau(g;\ \delta)_L$, $\delta \geqq 0$ *для некоторой ограниченной на* [0, 1] *функции* g, *существуют ограниченная на* [0, 1] *функция* f *с неограниченной вариацией, положительная константа* C *и последовательность натуральных чисел* $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ *такие, что* $\tau(f;\ \delta)_L \leqq \tau(\delta)$ *при* $\delta \geqq 0$ *и*

$$R_{n_i}(f, [0, 1])_r > C \ln(e + n_i \tau(1/n_i))/n_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

б) для любой функции $\varkappa(n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ *такой, что* $\varkappa(n) \to \infty$ *при* $n \to \infty$ *и* $\varkappa(n) = \varkappa(g;\ n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ *для некоторой ограниченной на* [0, 1] *функции* g, *существуют ограниченная на* [0, 1] *функция* f *с неограниченной вариацией, положительная константа* C *и последователь-*

ность натуральных чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ *такие, что* $\varkappa(f; n) \leq \varkappa(n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ *и*

$$R_{n_i}(f, [0, 1])_r > C \ln (e + \varkappa(n_i))/n_i, \ i = 1, 2, 3 \ldots$$

Из теоремы 10 при $\varkappa(n) = n$ следует утверждение теоремы 8.

Задача о нахождении точной по порядку оценки сверху для $R_n(f)_r$ в классе функций с ограниченной вариацией на $[0, 1]$ (сравните с [5]) решается следующей теоремой.

Теорема 11. *Если* $V_0^1 f < \infty$, *то* $R_n(f)_r = o(n^{-1})$, *и эта оценка точна по порядку в классе функций с ограниченной вариацией.*

Из теоремы 11, используя известное соотношение между хаусдорфовой и интегральной метриках [24], получаем важное утверждение.

Теорема 12. *Если функция* f *эквивалентна некоторой функции с ограниченной вариацией на* $[0, 1]$, *то*

$$R_n(f)_{L_1} = o(n^{-1}) \tag{24}$$

и оценка (24) *точна по порядку в рассматриваемом классе функций.*

В. А. Попов высказал гипотезу, что если функция f липшицова относительно метрике $L_p (1 \leq p \leq \infty)$ на $[0, 1]$, то $R_n(f)_{L_p} = o(n^{-1})$. Следствие А подтвердило справедливость этой гипотезы для $p = \infty$. Теорема 12 доказывает ее для $p = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. A. Popov. Rational uniform approximation of class V_r and its applications. *C. R Acad. bulg., Sci*, **29**, 1976, № 6, 791—794.
2. Бл. Сендов. Некоторые вопросы теории приближений функций и множеств в хаусдорфовой метрике. *Успехи мат. наук*, **24**, 1969, № 5, 141—178.
3. D. J. Newman. Rational approximation to $|x|$. *Michigan Math. J.*, **11**, 1964, 11—14.
4. А. А. Гончар. Оценки роста рациональных функций и некоторые их приложения. *Мат. сб.*, **72** (114), 1967, № 3, 489—503.
5. P. Szusz, P. Turan. On the constructive theory of functions II. *Studia Sci. Math. Hung.*, **1**, 1966, 315—322.
6. G. Freud. Über die Approximation reeller Funktionen durch rationale gebrochene Funktionen. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **17**, 1966, 313—324.
7. G. Freud. On the rational approximation of differentiable functions. *Studia Sci. Math. Hung.*, **5**, 1970, 437—439.
8. V. A. Popov. On the connection between rational and spline approximation. *C. R. Acad. bulg. Sci.*, **27**, 1974, No. 5, 623—626.
9. З. А. Чантурия. Модуль изменения функции и его применения в теории рядов Фурье. *Доклады АН СССР*, **214**, 1974, № 1, 63—66.
10. П. П. Петрушев. О рациональной аппроксимации функций. *Доклады БАН*, **29**, 1976, №10, 1405—1408.
11. V. A. Popov, J. Szabados. A remark on rational approximation of functions. *C. R. Acad. bulg. Sci.*, **28**, 1975, No. 10, 1303—1306.
12. А. П. Буланов. Рациональные приближения непрерывных функций с конечным изменением. *Известия АН СССР, сер. матем.*, **39**, 1975, № 5, 1142—1180.
13. П. П. Петрушев. Равномерные рациональные аппроксимации функций с конечным изменением. *ПЛИСКА Български математически студии*, **1**, 1977, 145—155.
14. А. П. Буланов. О порядке приближения выпуклых функций рациональными функциями. *Известия АН СССР, сер. матем.*, **33**, 1969, 1132—1148.
15. В. А. Попов, П. П. Петрушев. Точный порядок наилучшего равномерного приближения выпуклых функций рациональными функциями. *Мат. сб.*, **103** (145), 1977, № 2, 285—292.

16. А. П. Буланов. Рациональные приближения выпуклых функций с заданным модулем непрерывности. *Мат. сб.*, 84 (126), 1971, 476—494.
17. А. Хатамов. О рациональном приближении выпуклых функций класса Lip *α*. *Мат. заметки*, 18, 1976, № 6, 845—854.
18. П. П. Петрушев. О рациональной аппроксимации функций с выпуклой производной. *Доклады БАН*, 29, 1976, № 9, 1249—1252.
19. А. А. Абдугаппаров. О рациональных приближениях функций с выпуклой производной. *Мат. сб.*, 93 (135), 1974, № 4, 611—620.
20. А. Хатамов. О рациональных приближениях функций с выпуклой производной. *Мат. сб.*, 98 (140), 1975, № 2, 268—279.
21. Бл. Сендов. Апроксимиране на функции с алгебрични полиноми по отношение на една метрика от хаусдорфовски тип. *Годишник Соф. унив., Физ.-мат. фак.*, 55, 1962, 1—39.
22. Т. Боянов. О порядке наилучшего приближения алгебраическими многочленами относительно расстояния хаусдорфовского типа. *Доклады БАН*, 23, 1970, № 6, 635—638.
23. A. Andreev, V. A. Popov, Bl. Sendov. Jackson's type theorems for onesided polynomial and spline approximation. *C. R. Acad. bulg. Sci.*, 30, 1977, No. 11.
24. Бл. Сендов, В. А. Попов. О некоторых свойствах хаусдорфовой метрики. *Mathematica (Cluj)*, 8 (31), 1966, № 1, 163—172.

*Центр математики
и механики, п. я. 373
1090 София, Болгария*

Получено 16. 10. 1977.