КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'77
София . 1980, с. 121—125

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'77
Sofia . 1980, p. 121—125

ЗАМЕТКА О СХОДИМОСТИ ОБЩЕГО КВАДРАТУРНОГО ПРОЦЕССА С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ВЕСАМИ

П. Д. Пройнов

Резюме. В работе дано необходимое и достаточное условие для сходимости квадратурного процесса с положительными весами для всех интегрируемых по Риману функций. Получена также оценка для погрешности этого процесса для непрерывных функций. Основные теоремы работы обобщают соответствующие теоремы Г. Вейля (1916) и X. Нидеррайтера (1972).

1. Как известно, общий квадратурный процесс с положительными весами на отрезке $[0, 1]$ задается двумя матрицами: матрицей узлов $X=(x_k^{(n)})$ и матрицей весов $P=(P_k^{(n)})$, где $0\leqq x_k^{(n)}\leqq 1$, $P_k^{(n)}>0$; $k=1, \ldots, n$ $n=1, 2, \ldots$

Пусть $\varphi_\gamma(x)$ — характеристическая функция интервала $[0, \gamma)$*. Будем говорить, что пара матриц (X, P) равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$, если для любого $\gamma\in[0, 1]$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} P_k^{(n)}\varphi_\gamma(x_k^{(n)})=\gamma, \tag{1}$$

причем эта сходимость является равномерной на отрезке $[0,1]$.

Рассмотрим пару последовательностей $\{x_k\}$ и $\{P_k\}$, где $0\leqq x_k\leqq 1$, $P_k>0$ $(k=1, 2, \ldots)$. Эти последовательности порождают матрицы X и P с элементами $x_k^{(n)}=x_k$ и $P_k^{(n)}=P_k(k=1, \ldots)$. Будем говорить, что пара последовательностей $\{x_k\}$ и $\{P_k\}$ равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$, если пара матриц, порожденная этими последовательностями, является равномерно распределенной на отрезке $[0, 1]$.

Понятие равномерно распределенная пара последовательностей является естественным обобщением понятия равномерно распределенной последовательности, введенное Г. Вейлем [1]. Однако ниже мы покажем, что не существуют пары равномерно распределенных последовательностей.

* Здесь и дальше будем считать, что любой интервал вида $[0, \gamma)$ замкнут справа, если $\gamma=1$.

Заметим, что классическая теорема Г. Вейля [1] о равномерно распределенных последовательностях и квадратурном процессе с равными весами естественным образом обобщается для общего квадратурного процесса с положительными весами.

Теорема 1. *Квадратурный процесс, порожденный матрицами X и P, сходится для любой интегрируемой по Риману на отрезке* $[0, 1]$ *функции в том и только в том случае, если пара матриц* (X, P) *равномерно распределена на отрезке* $[0, 1]$.

Доказательство. Пусть

$$Q_n(f)=\sum_{k=1}^{n} P_k^{(n)} f(x_k^{(n)}); \quad I(f)=\int_0^1 f(x)dx.$$

Согласно условию теоремы нужно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(f)=I(f) \tag{2}$$

в том и только в том случае, если пара матриц (X, P) равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Необходимость очевидна, поэтому докажем лишь достаточность.

Пусть пара матриц (X, P) равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Тогда из (1) легко заметить, что равенство (2) выполняется для любой кусочно-постоянной функции на отрезке $[0, 1]$.

Возьмем произвольную функцию f, интегрируемую по Риману на отрезке $[0, 1]$, и произвольное $\varepsilon>0$, и выберем такое разбиение $T=\{0=t_0<t_1<\cdots<t_r=1\}$ отрезка $[0, 1]$, чтобы

$$\overline{S}(f;\ T)-\underline{S}(f;\ T)<\varepsilon, \tag{3}$$

где $\underline{S}(f;\ T)$ и $\overline{S}(f;\ T)$ обозначают соответственно нижнюю и верхнюю сумму Дарбу функции f, соответствующих этому разбиению.

Положим

$$m_i=\inf\{f(x): x\in[t_{i-1}, t_i)\}; \quad M_i=\sup\{f(x): x\in[t_{i-1}, t_i)\}$$

и рассмотрим функции $g(x)$ и $G(x)$, заданных на отрезке $[0, 1]$, следующим образом: $g(x)=m_i$, если $x\in[t_{i-1}, t_i)$, $i=1,\ldots,r$; $G(x)=M_i$, если $x\in[t_{i-1}, t_i)$, $i=1,\ldots,r$; Очевидно, $g(x)\leq f(x)\leq G(x)$ для любого $x\in[0, 1]$. Учитывая, что $P_k^{(n)}>0$, получим

$$Q_n(g)\leq Q_n(f)\leq Q_n(G). \tag{4}$$

Так как функции $g(x)$ и $G(x)$ являются кусочно-постоянными, то для них выполняется равенство (2), то есть

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(g)=I(g)=\underline{S}(f;\ T), \quad \lim_{n\to\infty} Q_n(G)=I(G)=\overline{S}(f;\ T).$$

Отсюда и из равенств (3) и (4) вытекает, что для достаточно больших значений n будут справедливы неравенства $I(f)-\varepsilon<Q_n(f)<I(f)+\varepsilon$, т. е. равенство (2) доказано для функции f.

Теорема 2. *Не существуют равномерно распределенные пары последовательностей на отрезке* $[0, 1]$.

Доказательство. Допустим, что пара последовательностей $(\{x_k\}, \{P_k\})$ равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Тогда согласно теореме 1 квадратурный процесс, порожденный этими последовательностями, сходится для любой интегрируемой по Риману функции и, в частности, сходится для любой непрерывной функции. Но тогда по известной теореме (см. [3], с. 632, теорема 4) вытекает, что $\lim_{n\to\infty} B_n=0$, где $B_n=\max\{p_k \mid 1\leqq k\leqq n\}$, но, очевидно, последовательность $\{B_n\}$ не может сходиться к нулю, так как из условия $P_k>0$ $(k=1,\ldots)$ вытекает, что $B_{n+1}\geqq B_n>0$.

2. Для того чтобы получить оценку для сходимости квадратурного процесса, порожденного матрицами X и P, введем величину

$$D_n(X, P)=\sup\{|\gamma-\Sigma_{k=1}^n P_k^{(n)}\varphi_\gamma(x_k^{(n)})| : 0\leqq\gamma\leqq 1\}.$$

Очевидно, что пара матриц будет равномерно распределенной на отрезке $[0, 1]$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} D_n(X, P)=0. \tag{5}$$

В дальнейшем мы будем считать, что матрица весов P удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{n} P_k^{(n)}=1. \tag{6}$$

Следующая теорема обобщает соответствующий результат из [2], полученный для классического отклонения последовательности.

Теорема 3. *Пусть числа матрицы X удовлетворяют условию $x_1^{(n)}\leqq x_2^{(n)}\leqq\cdots\leqq x_n^{(n)}$, а числа матрицы P удовлетворяют условию (6) Тогда имеют место следующие формулы:*

$$D_n(X, P)=\max\{\max(|x_k^{(n)}-a_{k-1}^{(n)}|, |x_k^{(n)}-a_k^{(n)}|) : 1\leqq k\leqq n\}, \tag{7}$$

$$D_n(X, P)=\max\{(\frac{P_k^{(n)}}{2}+|x_k^{(n)}-(a_{k-1}^{(n)}+a_k^{(n)})/2|) : 1\leqq k\leqq n\}, \tag{8}$$

где $a_0^{(n)}=0$, $a_k^{(n)}=\sum_{i=1}^{k} P_i^{(n)}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$.

Доказательство. Введем обозначение $F_n(\gamma)=\Sigma_{k=1}^n P_k^{(n)}\varphi_\gamma(x_k^{(n)})$. Очевидно, $F_n(\gamma)$ — кусочно-постоянная неубывающая функция с разрывами в точках сетки $\Sigma=\{x_1^{(n)},\ldots, x_n^{(n)}\}$. Легко доказать [4, с. 159], что верхняя грань разности $|\gamma-F_n(\gamma)|$ не может достигаться в точке непрерывности функций $F_n(\gamma)$. Откуда вытекает, что

$$D_n(X, P)=\max\{\max(|x_k^{(n)}-F_n(x_k^{(n)}-0)|, |x_k^{(n)}-F_n(x_k^{(n)}+0)|) : 1\leqq k\leqq n\}. \tag{9}$$

Если все точки сетки Σ различны, то, учитывая, что $x_1^{(n)}\leqq x_2^{(n)}\leqq\cdots\leqq x_n^{(n)}$, равенство (7) сразу вытекает из (9).

Рассмотрим случай, когда среди точек сетки Σ есть совпадающие. Будем говорить, что точка $a\in[0, 1]$ имеет кратность p $(0\leqq p\leqq n)$, если ровно p точек сетки Σ совпадают с точкой a. Пусть точка $x_q^{(n)}\in\Sigma$ имеет

кратность p $(1 \leq p \leq n)$. Тогда существует натуральное число $j\,(j \leq q)$, такое, что $x_j^{(n)} = \cdots = x_q^{(n)} = \cdots = x_{j+p-1}^{(n)}$.
Замечаем, что

$$F_n(x_j^{(n)}-0) = \cdots = F_n(x_{j+p-1}^{(n)}-0) = a_{j-1}^{(n)},$$
$$F_n(x_j^{(n)}+0) = \cdots = F_n(x_{j+p-1}^{(n)}+0) = a_{j+p-1}^{(n)}.$$

Следовательно,

$$(10)\quad \max\{\max(|x_k^{(n)}-F_n(x_k^{(n)}-0)|,\ |x_k^{(n)}-F_n(x_k^{(n)}+0)|) : j \leq k \leq j+p-1\}$$
$$= \max(|x_j^{(n)}-a_{j-1}^{(n)}|,\ |x_j^{(n)}-a_{j+p-1}^{(n)}|).$$

Учитывая, что $a_0^{(n)} < a_1^{(n)} < \cdots < a_n^{(n)}$, легко доказываем, что

$$(11)\quad \max\{\max(|x_k^{(n)}-a_{k-1}^{(n)}|,\ |x_k^{(n)}-a_k^{(n)}|) : j \leq k \leq j+p-1\}$$
$$= \max(|x_j^{(n)}-a_{j-1}^{(n)}|, |x_j^{(n)}-a_j^{(n)}|, \ldots, |x_j^{(n)}-a_{j+p-1}^{(n)}|)$$
$$= \max(|x_j^{(n)}-a_{j-1}^{(n)}|, |x_j^{(n)}-a_{j+p-1}^{(n)}|).$$

Сравнивая (10) и (11), находим

$$\max\{\max(|x_k^{(n)}-F_n(x_k^{(n)}-0)|,\ |x_k^{(n)}-F_n(x_k^{(n)}+0)|) : j \leq k \leq j+p-1\}$$
$$= \max\{\max(|x_k^{(n)}-a_{k-1}^{(n)}|,\ |x_k^{(n)}-a_k^{(n)}|) : j \leq k \leq j+p-1\}.$$

Отсюда и из формулы (9) легко получаем равенство (7).

Формула (8) вытекает из формулы (7) и следующих равенств:

$$\max(|x_k^{(n)}-a_{k-1}^{(n)}|,\ |x_k^{(n)}-a_k^{(n)}|) = (a_k^{(n)}-a_{k-1}^{(n)})/2 + |x_k^{(n)}-(a_{k-1}^{(n)}+a_k^{(n)})/2|$$
$$= P_k^{(n)}/2 + |x_k^{(n)}-(a_{k-1}^{(n)}+a_k^{(n)})/2|.$$

Этим теорема 3 доказана.

Из формулы (8) теоремы 3 вытекает следующее

С л е д с т в и е 1. Если матрица весов, удовлетворяющая условию (6), фиксирована, то

$$(12)\quad \min\{D_n(X,P) : X\} = 2^{-1}\max\{P_k^{(n)} : 1 \leq k \leq n\}.$$

Отсюда вытекает известный результат (другое доказательство см. [4, с. 64, следствие 2]), что для любой матрицы узлов X и для любой матрицы весов P, удовлетворяющей условию (6), выполняется неравенство

$$D_n(X,P) \geq 1/2n,$$

причем равенство имеет место лишь в случае $x_k^{(n)} = (2k-1)/2n$, $P_k^{(n)} = 1/n$ $(k=1,\ldots,n)$. Для любой функции f положим

$$R_n(f; X, P) = \int_0^1 f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} P_k^{(n)} f(x_k^{(n)}).$$

Из формулы (7) теоремы 3 вытекает следующая

Теорема 4. *Пусть матрица P удовлетворяет условию* (6). *Тогда для любой непрерывной на отрезке* $[0, 1]$ *функции f имеет место оценка*

$$|R_n(f;\ X, P)| \leqq \omega(f;\ D_n(X, P)), \tag{13}$$

где $\omega(f;\ \delta)$ — равномерный модуль непрерывности функции f.

Если пара матриц (X, P) равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$, то оценка (13) будет сходящейся.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 4, заметим, что она обобщает теорему Х. Нидеррайтера [3], дающую оценку для погрешности квадратурной формулы с равными весами.

Доказательство. Без потери общности мы можем предположить, что $x_1^{(n)} \leqq x_2^{(n)} \leqq \cdots \leqq x_n^{(n)}$. Легко заметить, что

$$R_n(f;\ X, P) = \sum_{k=1}^{n} \int_{a_{k-1}^{(n)}}^{a_k^{(n)}} [f(x) - f(x_k^{(n)})]\, dx.$$

Следовательно,

$$|R_n(f;\ X, P)| \leqq \sum_{k=1}^{n} \int_{a_{k-1}^{(n)}}^{a_k^{(n)}} \omega(f;\ |x - x_k^{(n)}|)\, dx. \tag{14}$$

Но, если $x \in [a_{k-1}^{(n)}, a_k^{(n)}]$, то применяя формулу (7) теоремы 3, находим, что

$$|x - x_k^{(n)}| \leqq \max(|x_k^{(n)} - a_{k-1}^{(n)}|, |x_k^{(n)} - a_k^{(n)}|) \leqq D_n(X, P). \tag{15}$$

Учитывая, что модуль непрерывности $\omega(\delta) = \omega(f;\ \delta)$ является монотонной функцией, то из (14) и (15) получаем оценку (13).

Если пара матриц (X, P) равномерно распределена, то сходимость оценки (13) вытекает из формулы (5), а также из известного свойства модуля непрерывности: $\lim_{\delta \to 0} \omega(f;\ \delta) = 0$ для любой функции f, непрерывной на отрезке $[0, 1]$. Теорема 4 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Weyl. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins. *Math. Ann.*, 77, 1916, Nr. 3, 313—352.
2. H. Niderreiter. Methods for estimating discrepancy. Proc. Sympos. on Applications of Number to Numerical Analysis (Montreal, 1971). New York, 1972.
3. И. П. Натасон. Конструктивная теория функций. Москва, 1949.
4. И. М. Соболь. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. Москва, 1969.

Пловдивский университет
им. Паисия Хилендарского
Пловдив Болгария

Получено 22. 8. 1977.