КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'77
*София . 1980, с. 127—129*

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'77
*Sofia . 1980, p. 127—129*

# РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ СЛЕДЫ ОПЕРАТОРОВ

**В. А. Садовничий**

***Резюме.*** В работе развиваются аналитические методы для получения регуляризованных следов операторов. В случае обыкновенных дифференциальных операторов применяются методы, связанные с дзета-функцией, ассоциированной с целой функцией некоторого класса $K$. Если операторы порождаются уравнениями в частных производных, то применяются методы теории возмущений и некоторые результаты теории диофантовых приближений.

Наши рассмотрения будут связаны с понятием регуляризованных следов операторов. Простейшим утверждением, связанным с теорией следов операторов, является утверждение о том, что след матрицы, т. е. сумма ее диагональных элементов, равняется сумме собственных чисел с учетом их кратностей. Если условиться называть сумму собственных значений спектральным следом, соответствующим данной матрице преобразования в $n$-мерном пространстве, а сумму диагональных элементов — матричным следом преобразования, то упомянутый факт можно сформулировать так: матричный след линейного оператора в $n$-мерном линейном пространстве равен его спектральному следу.

Если оператор действует в сепарабельном гильбертовом пространстве и ядерный, то сформулированное выше утверждение остается справедливым. Матричным следом ядерного оператора $A$ называется выражение — $\sum\limits_{(j)} (A\varphi_j, \varphi_j)$, где $\{\varphi_j\}$ — некоторый ортонормированный базис пространства, а спектральным следом называется выражение $\sum\limits_{(i)} \lambda_i$, $\lambda_i$ — собственные числа оператора, суммирование происходит с учетом кратностей.

Для обыкновенных дифференциальных операторов ввиду их неограниченности суммы из их собственных (если у оператора спектр дискретен) не существуют. Однако можно ввести некоторый аналог понятию спектрального следа — так называемые регуляризованные суммы из собственных чисел — и вычислить их. Формулы регуляризованных сумм из собственных чисел операторов играют важную роль в различных разделах анализа, они могут служить для приближенного вычисления первых собственных значений, используются в обратных задачах, при интегрировании нелинейных уравнений, при нахождении асимптотики спектральной функции и в других вопросах.

Рассмотрим более подробно регуляризованные следы для регулярных обыкновенных дифференциальных операторов. Формулы для следов в этом случае являются следствием общего факта, справедливого для некоторого класса целых функций — они выражаются через значения аналитического продолжения дзета-функции, ассоциированной с этим классом функций.

Рассмотрим класс $K$ целых функций $f(z)$ вида

$$f(z)=\sum_{k=0}^{N-1} e^{\alpha_k z} . P_k(z),$$

где $\alpha_k$ — комплексные постоянные, а

$$P_k(z) \sim z^{n_k} \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_{\nu}^{(k)} . z^{-\nu}, \ z \to \infty, \ \beta_0^{(k)} \neq 0,$$

$n_k$ — целые числа. Предполагается, что плоскость $z$ можно покрыть конечным числом открытых секторов, $\Omega_s$, $s=0, 1, \ldots, r-1$, содержащих начало координат, в каждом из которых функции $P_k(z)$ являются аналитическими при $|z|>R$, $R$ — некоторое положительное число.

Числа $\alpha_k$, $\beta_{\nu}^{(k)}$ называются параметрами асимптотики функции $f(z) \in K$.

Справедливы следующие теоремы (см. [1]).

Теорема 1. *Дзета-функция* $Z_0(\sigma)=\sum_{(l)} z_l^{-\sigma}$, $\operatorname{Re} \sigma > 1$, *ассоциированная с функцией* $f(z) \in K$, $z_l$ — *нули* $f(z)$, *аналитически продолжается во всю плоскость как целая функция.*

Теорема 2. *При любом целом* $m<\tau$ *справедливы равенства*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{r-1} [z_{n,1,s}^{m} . \beta_{n,s} - \sum_{k=0}^{\tau} n^{-k+m} R_k^{(s)}(-m, \ln n)] = \omega_{m+1}^{(0)} - \Phi_{\tau}^{(0)}(-m),$$

*здесь* $z_{n,1,s}$ — *нули функции* $f_1(z) \in K$, $\beta_{n,s}$ — *вычеты функции* $\Phi(z)=f_2(z)/f_1(z)$ *при* $z=z_{n,1,s}$, $R_k^{(s)}$ — *определенные многочлены степени* $k$ *от* $\ln n$, *числа* $\omega_{m+1}^{(0)}$, $\Phi_{\tau}^{(0)}(-m)$ *так же, как и коэффициенты* $R_k^{(s)}$, *явно выражаются через параметры асимптотики двух функций* $f_1(z)$, $f_2(z)$ *класса* $K$.

Данные теоремы могут быть доказаны путем аналитического продолжения функции $(1/2\pi i)\int_{\Gamma_0} \Phi(z) . z^{-\sigma} dz$, $\operatorname{Re} \sigma > 1$ по параметру $\sigma$, здесь $\Gamma_0$ — контур типа Ганкеля, лежащий в одном из указанных выше открытых секторов $\Omega_s$ — секторе $\Omega_0$ и охватывающий начало координат.

Теорема 2 решает вопрос об регуляризованных следах для широкого класса обыкновенных дифференциальных операторов. Из нее, в частности, получается асимптотика спектральной функции для оператора Штурма—Лиувилля. Пусть заданы два оператора $L_i$, $i=1, 2$

$$L_i y = -y'' + q_i(x) y = \lambda y,$$

$$y'(0) - hy(0) = 0,$$

$$y'(\pi) + H_i y(\pi) = 0, \ i=1, 2.$$

Тогда для соответствующих им спектральных функций справедливо равенство

$$\varrho_1(\lambda) = \varrho_2(\lambda) + o(1).$$

Для уравнений с частными производными задача нахождения регуляризованных следов является трудной задачей. Мы предлагаем некоторый подход.

Пусть $T$ — самосопряженный дискретный, линейный оператор в гильбертовом пространстве $H$, $\sigma(T)=\{\lambda_n\}$, его спектр $d_n=\varrho(\lambda_n, [\sigma(T)\setminus\lambda_n])$ — расстояние от точки $\lambda_n$ до спектра оператора $T$ без собственного числа $\lambda_n$ (и кратных с ним чисел). Пусть $P$ — ограниченный, определенный всюду в $H$ оператор, $\nu_n$ — кратность собственного значения $\lambda_n$, $\vartheta_{in}$ — определенным способом фиксированные собственные функции оператора $T$, $i=1, 2, \ldots, \nu_n$.

Справедлива теорема (см. [2]).

Теорема 3. *Пусть* $\sum\limits_{(n)} \nu_n \cdot d_n^{-1}$, *тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\mu_n-\lambda_n|<\infty$ *тогда и только тогда, когда* $\sum\limits_{n} \sum\limits_{i=1}^{\nu_n} |(P\vartheta_{in}, \vartheta_{in})|<\infty$, *здесь* $\mu_n$ — *собственные числа оператора* $T+P$.

Рассмотрим теперь задачу Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике $\Pi$ со сторонами $a$ и $b$ и обозначим соответствующий оператор через $T$; через $P$ обозначим оператор умножения на гладкую функцию $p(x, y)$. Пусть $\lambda_n$ — собственные значения оператора $T^{3+\gamma}$, $\mu_n$ — оператора $T^{3+\gamma}+P$, $\gamma>0$. При некоторых условиях на функцию $p(x, y)$, которые обычно накладываются на функции в данных вопросах, справедлива теорема.

Теорема 4. *Если* $a^2/b^2$ — *алгебраическое число степени* $n\geqq 2$, *то*

$$\sum_{(n)}(\lambda_n-\mu_n)=-(p(0, 0)+p(a, 0)+p(0, b)+p(a, b))/16.$$

Данная теорема получается, если использовать теорему Туэ — Зигеля — Рота о приближении алгебраических чисел рациональными. Используя другие теоремы из теории диофантовых приближений, получаем различные теоремы в теории следов уравнений с частными производными.

ЛИТЕРАТУРА


1. В. А. Садовничий. О следах с весом и об асимптотике спектральной функции. *Диф. уравнения,* 10, 1974, № 10, 1808—1818.
2. В. А. Садовничий, В. В. Дубровский. Об одной абстрактной теореме теории возмущений, о формулах регуляризованных следов и о дзета-функции операторов. *Диф. уравнения,* 13, 1977, № 7, 1264—1271.



*Московский гос. унив.*
*Факультет вычислительной математики*
*Москва СССР*



*Получено 5. 11. 1977.*