КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'77
София . 1980, с. 131—143

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'77
Sofia . 1980, p. 131—143

СХОДИМОСТЬ ПРОИЗВОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Бл. Х. Сендов

Резюме. В множестве сегментнозначных функций можно определить производную, которая всегда существует. Используя такую производную, рассматривается сходимость последовательностей линейных положительных операторов, удовлетворяющих условиям П. П. Коровкина (1969). Полученные утверждения обобщают ряд предыдущих результатов.

П. П. Коровкиным [1, 2] изучалась сходимость последовательности линейных положительных операторов относительно произвольного A-расстояния для функций, заданных на метрическом компакте. В упомянутых работах П. П. Коровкина не только вводится понятие A-расстояния, но и получаются окончательные результаты для условия сходимости, когда область определения функции есть метрический компакт. Расширение результатов П. П. Коровкина в случае неограниченных функций получено М. Мюлером [3] и Г. Шмидом [4].

В заметке [5] мы немножко изменили определение П. П. Коровкина о A-расстоянии и сформулировали необходимые и достаточные условия о сходимости последовательностей линейных положительных операторов, когда область определения функции не является компактом. Нужно отметить, что это изменение в определении A-расстояния несущественно и сделано с целью облегчить получения количественных оценок.

Классическая теорема П. П. Коровкина о равномерной сходимости последовательностей линейных положительных операторов [6] обобщалась и в другом направлении. Изучались условия о сходимости производных линейных положительных операторов [7, 8, 9, 10].

В этой работе рассматривается вопрос о сходимости производных линейных положительных операторов относительно A-расстояния. При определении условия сходимости используется одно обобщение понятия производной, так называемой сегментной производной (S-производной), которое было недавно введено автором [11, 12].

1. Элементы сегментного анализа. Пусть R множество реальных чисел и $\bar{R}$ получается с добавлением $-\infty$ и $+\infty$ к R. Как обычно, сегментом $[a, b]$, $a, b \in \bar{R}$, $a \leqq b$, будем называть множество реальных чисел

$$[a, b] = \{x : a \leqq x \leqq b\}.$$

Через $S(\bar{R})$ будем обозначать множество всех сегментов, а через $S(R)$ — множество всех конечных сегментов.

Пусть $a, b \in S(\bar{R})$, $a=[a_1, a_2]$, $b=[b_1, b_2]$ и $*$ обозначает любое из соотношений $<$, $\leqq$, $>$, $\geqq$. Будем обозначать $a*b$, если для каждого $x \in a$ и для каждого $y \in b$ имеет место соотношение $x*y$. Очевидно, что, например, $a \leqq b$ тогда и только тогда, когда $a_2 \leqq b_1$. Если $a, b \in S(\bar{R})$, $a \leqq b$ и $b \leqq a$, то следует не только, что $a=b$, а еще, что a и b точечные сегменты, т. е. $a, b \in \bar{R}$.

Будем говорить, что $a \subset b$, если для каждого $x \in a$ имеем $x \in b$. Если $a \subset b$ и $b \subset a$, то $a=b$.

Пусть $*$ обозначает любую арифметическую операцию $+$, $-$, $.$, $/$ и $a, b \in S(\bar{R})$. Тогда сегмент $c=a*b$ определяется следующим образом:

$$c=a*b=\{x : x=\xi*\eta,\ \xi \in a,\ \eta \in b,\ \xi, \eta \in \bar{R}\}.$$

Это обычный способ определения арифметических операций в интервальном анализе [13]. Мы дополняем его следующим образом. Каждый раз, когда арифметическая операция $\xi*\eta$ для некоторой пары ξ, η является неопределенной, мы берем по определению $a*b=[-\infty, \infty]$. Так, например, если сегмент b содержит нуль, то $a/b=[-\infty, \infty]$. Таким образом все арифметические операции определены для всех элементов $S(\bar{R})$ и результат всегда содержится в $S(\bar{R})$.

Сегментная арифметика существенно различается от обычной арифметики. Например, в сегментной арифметике вычитание на является обратным действием сложения. Если a, b, $c \in S(\bar{R})$ и $a+b=c$, то $a \subset c-b$, но в общем случае не имеет место равенство $a=c-b$. Последнее равенство верно только тогда, когда сегмент b является точечным сегментом, т. е. $b \in R$.

В сегментной арифметике не имеет место дистрибутивный закон. Если a, b, $c \in S(\bar{R})$, то $(a+b)c \subset ac+bc$, что называется субдистрибутивным законом [14].

Добавим еще, что если α, $\beta \in R$ и $a \in S(\bar{R})$, то $(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a$ тогда и только тогда, когда $\alpha\beta \geqq 0$ для сегмента a с положительной длиной.

В $S(R)$ определяем расстояние $\varrho(a, b)$, a, $b \in S(R)$, следующим образом. Если $a=[a_1, a_2]$, $b=[b_1, b_2]$, то

$$\varrho(a, b)=\max(|a_1-b_1|,\ |a_2-b_2|).$$

Не трудно заметить, что

$$\varrho(a, b)=\max\{\max_{x \in a}\min_{y \in b}|x-y|,\ \max_{x \in b}\min_{y \in a}|x-y|\},$$

т. е. $\varrho(a, b)$ является хаусдорфовым расстоянием мржду замкнутыми подмножествами a и b метрического пространства реальных чисел R.

Как частный случай теоремы Е. Михаеля [15] получается

Лемма 1. *Множество $S(R)$—метризированное расстояние ϱ, является полным метрическим пространством.*

Будем говорить, что последовательность сегментов $\{a_n\}_1^\infty$, $a_n \in S(R)$ сходится, если существует сегмент $a \in S(R)$, для которого $\lim_{n\to\infty}\varrho(a, a_n)=0$. Сегмент a называется пределом последовательности $\{a_n\}_1^\infty$.

Определение 1 [11]. *Будем называть сегмент a S-пределом (сегментным пределом) последовательности сегментов $\{a_n\}_1^\infty$, если a является пересечением всех сегментов, содержащих все a_n, начиная с некоторого номера. Будем обозначать его через*

$$\operatorname{Slim}_{n\to\infty} a_n = a.$$

Очевидно, каждая последовательность сегментов $\{a_n\}_1^\infty$ из $S(\bar{R})$ имеет S-предел, который принадлежит $S(\bar{R})$. Если последовательность сегментов $\{a_n\}_1^\infty$ сходится и имеет предел a, то

(1)
$$\operatorname{Slim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Пример. Если $a_n = (-1)^n$, то последовательность чисел $\{a_n\}_1^\infty$ расходится, но имеет S-предел $\operatorname{Slim}_{n\to\infty}(-1)^n = [-1, 1]$.

Не трудно доказать следующее утверждение [11].

Теорема 1. *Пусть $\{a_n\}_1^\infty$ и $\{b_n\}_1^\infty$ две последовательности сегментов. Если $*$ любая арифметическая операция, то*

$$\operatorname{Slim}_{n\to\infty}(a_n * b_n) \subset (\operatorname{Slim}_{n\to\infty} a_n) * (\operatorname{Slim}_{n\to\infty} b_n).$$

Пусть $\Omega \subset \bar{R}$. Обозначим через A_Ω множество всех сегментных функций, заданных на Ω, т. е. каждое $f \in \mathsf{A}_\Omega$ является некоторым изображением Ω в $S(\bar{R})$. Через A_Ω будем обозначать множество всех реальных функций, заданных на Ω, т. е. каждое $f \in A_\Omega$ является некоторым изображением Ω в $\bar{R}$. Так как $R \subset S(\bar{R})$, то $A_\Omega \subset \mathsf{A}_\Omega$.

Для каждого $f \in \mathsf{A}_\Omega$ и каждого $\delta > 0$ определим две функции из $A_{\bar{\Omega}}$, где $\bar{\Omega}$ является замыканием множества Ω:

$$I(\delta, f; x) = I(\Omega, \delta, f; x) = \inf\{y : y \in f(t),\ t \in [x-\delta, x+\delta] \cap \Omega\},$$

$$S(\delta, f; x) = S(\Omega, \delta, f; x) = \sup\{y : y \in f(t),\ t \in [x-\delta, x+\delta] \cap \Omega\}.$$

Нижней и верхней функциями Бэра для $f \in \mathsf{A}_\Omega$ называются

$$I(f; x) = I(\Omega, f; x) = \lim_{\delta\to+0} I(\delta, f; x),$$

$$S(f; x) = S(\Omega, f; x) = \lim_{\delta\to+0} S(\delta, f; x).$$

По определению для каждой $f \in \mathsf{A}_\Omega$ имеем $I(f)$, $S(f) \in A_{\bar{\Omega}}$, т. е. I и S заданные в A_Ω операторы с областью значений в $A_{\bar{\Omega}}$.

Определение 2. *Дополненным графиком* [16] *функции $f \in \mathsf{A}_\Omega$ назовем сегментную функцию $F(f) \in \mathsf{A}_{\bar{\Omega}}$, определенную следующим образом:*

$$F(f; x) = F(\Omega, f; x) = [I(f; x), S(f; x)].$$

Обозначим через F_Ω множество тех функций из $\mathsf{A}_{\bar{\Omega}}$, для которых $F(f) = f$, т. е. множество собственных векторов оператора F. Не трудно увидеть, что имеет место

Лемма 2. *Если $f \in A_\Omega$, то необходимое и достаточное условие для того, чтобы f была непрерывна в точке $x_0 \in \Omega$, состоит в том, чтобы сегмент $F(f; x_0)$ вырождался в точку.*

Следовательно, если $F(f) \in A_\Omega$, то f непрерывна на Ω, т. е. $f \in C_\Omega$.

Определение 3 [11]. *Если $f \in \mathsf{A}_\Omega$ и $x_0 \in \bar{\Omega}$, то сегмент a называется S-пределом функции f в точке x_0, если a—минимальный сегмент, содержащий все сегменты вида $\operatorname{Slim}_{n\to\infty} f(x_n)$, где $x_n \in \Omega$, $x_n \neq x_0$ и $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Этот сегмент a обозначим через $\operatorname{Slim}_{x\to x_0} f(x)$.*

Не трудно видеть, что имеет место

Лемма 3. *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы $f \in \mathsf{A}_\Omega$ принадлежала F_Ω, состоит в том, что для каждого $x_0 \in \Omega$ имело бы место соотношение $\operatorname{Slim}_{x\to x_0} f(x) \subset f(x_0)$.*

Из теоремы 1 получается непосредственно

Теорема 2. *Если $f, g \in \mathsf{F}_\Omega$, $x_0 \in \Omega$ и $*$ любая арифметическая операция, то*

$$\operatorname{Slim}_{x\to x_0} (f(x) * g(x)) \subset f(x_0) * g(x_0)$$

и, следовательно, $h = f * g \in \mathsf{F}_\Omega$.

Определение 4 [12]. *S-производной (сегментной производной) функции $f \in \mathsf{A}_\Omega$ называется сегментная функция*

$$D(f; x) = \operatorname{Slim}_{h\to 0} (f(x+h) - f(x))/h.$$

Очевидно, оператор сегментного дифференцирования определен для каждой функции из A_Ω и его значения тоже принадлежат A_Ω. С другой стороны, согласно (1), если $f \in \mathsf{A}_\Omega$ имеет производную $f'(x_0)$ в точке $x_0 \in \Omega$, то

$$D(f; x_0) = f'(x_0). \tag{2}$$

В [12] даны ряд свойств S-производной, из которых мы приведем те, которые будут нам необходимы в дальнейшем.

Теорема 3. *Если $f, g \in \mathsf{A}_\Omega$, то для каждого $x \in \Omega$*

$$D(f+g; x) \subset D(f; x) + D(g; x),$$

при этом, если функция f имеет производную $f'(x_0)$ в точке x_0, то

$$D(f+g; x_0) = D(f; x_0) + D(g; x_0) = f'(x_0) + D(g; x_0).$$

Введем понятие выпуклости k-того порядка для сегментных функций, как обычно. Определим k-тую разделенную разность $[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k; f]$ для $f \in \mathsf{A}_\Omega$ в узлах $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k \in \Omega$; $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k$ обычным образом

$$[x_i; f] = f(x_i),$$

$$[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+l}; f] = ([x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+l}; f]$$

$$-[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+l-1}; f])/(x_{i+l} - x_i).$$

Определение 5. *Сегментная функция $f \in \mathsf{A}_\Omega$ называется выпуклой k-того порядка на Ω, если для каждых $k+1$ различных точек $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k \in \Omega$ имеет место неравенство $[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k; f] \geqq 0$.*

При этом определении выпуклость нулевого порядка означает неотрицательность, выпуклость первого порядка — монотонность, выпуклость второго порядка — обычная выпуклость и т. д.

Если через D^k обозначим k-кратное применение оператора сегментного дифференцирования, то имеет место следующее утверждение [12]:

Теорема 4. *Необходимое и достаточное условие для того чтобы функция $f \in \Delta_\Omega$ была выпуклой k-того порядка на Ω, является неравенство* $D^k(f; x) \geqq 0$ для каждого $x \in \Omega$.

2. Сходимость последовательностей линейных положительных операторов относительно A-расстояния. Пусть $\Delta \subset \Omega$ и B_Ω некоторое подмножество Δ_Ω.

Определение 6 [5, 17]. *Расстояние* $r_A(\Delta; f, g) = r_A(f, g)$, $f, g \in B_\Omega$ *называется A-расстоянием в B_Ω на Δ, если:*

1) $r_A(f, g) = r_A(f, g) \geqq 0$;

2) $r_A(f, g) \leqq r_A(f, h) + r_A(h, g)$;

3) *если для всех* $x \in \Delta$, $\varphi, \psi \in B_\Omega$

$$\varphi(x) \leqq f(x) \leqq \psi(x) \text{ и } \varphi(x) - C \leqq g(x) \leqq \psi(x) + C,$$

где C — константа, то $r_A(f, g) \leqq r_A(\varphi, \psi) + |C|$;

4) *если C — константа, то* $r_A(f, f + C) = 0 \Longleftrightarrow C = 0$.

Приведенное определение 6 более узкое, чем определение A-метрики, данное П. П. Коровкиным [1, 2]. В определении П. П. Коровкина вместо условий 3) и 4) стоят условия:

3′) если $f(x) \leqq g(x) \leqq \varphi(x)$ для всех $x \in \Delta$, то

$$r_A(f, \varphi) \geqq \max[r_A(f, g),\ r_A(g, \varphi)];$$

4′) существуют две ограниченные на Δ функции f и g, для которых $r_A(f, g) > 0$;

5′) $r_A(f, g) \leqq r_C(f, g) = \sup\limits_{x \in \Delta} |f(x) - g(x)|$.

Очевидно, из 4) следует 4′) и из 3) следует 3′) и 5′), так что наше определение более узкое, чем определение П. П. Коровкина [1, 2], но тем не менее ряд классических расстояний удовлетворяют условиям 1)—4).

A-расстояниями, например, согласно определению 6 являются следующие расстояния:

a) равномерное расстояние

$$r_C(f, g) = \sup_{x \in \Delta} |f(x) - g(x)|;$$

b) равномерное расстояние с весом $\theta(x) \geqq 1$

$$r_{c,\theta}(f, g) = \sup_{x \in} |f(x) - g(x)| / \theta(x);$$

c) все L_p расстояния для $p \geqq 1$

$$L_p(f, g) = \{(b-a)^{-1} \int_a^b |f(x) - g(x)|^p\, dx\}^{1/p};$$

d) хаусдорфовое расстояние [16] с параметром $\alpha > 0$

$$r(\alpha; f, g) = \max\{\sup_{x \in \Delta} \inf_{\xi \in \Delta} \max[|x - \xi|,\ \varrho(F(f; x),\ F(g; \xi))],$$

$$\sup_{x \in \Delta} \inf_{\xi \in \Delta} \max[|x - \xi|,\ \varrho(F(g; x),\ F(f; \xi))]\}.$$

Определение 7. *Модуль A-непрерывности функции $f \in B_\Omega$ на Δ определяется через равенство $\tau_A(f;\delta)=r_A(I(\delta/2,f), S(\delta/2,f))$, где $I(f)$ и $S(f)$ являются соответственно нижней и верхней функциями Бэра для f.*

Очевидно, $\tau_A(f;\delta)$ как функция переменного $\delta \geqq 0$ монотонно возрастает. Для равномерного расстояния определенный таким образом модуль совпадает с обычным модулем непрерывности

$$\tau_c(f;\delta)=\omega(f;\delta)=\sup\{|f(x_1)-f(x_2)|: x_1, x_2 \in \Delta, |x_1-x_2| \leqq \delta\}.$$

Из 3) следует, что для каждого A-расстояния имеет место неравенство

$$\tau_A(f;\delta) \leqq \omega(f;\delta). \tag{3}$$

Определение 8. *Функция $f \in B_\Omega$ называется A-непрерывной на Δ, если $\lim_{\delta\to+0}\tau_A(f;\delta)=0$.*

Из определения модуля A-непрерывности непосредственно следует

Лемма 4. *Равенство*

$$r_A(I(f),\ S(t))=0$$

является необходимым и достаточным условием для A-непрерывности функции $f \in B_\Omega$ на Δ.

Для равномерного расстояния A-непрерывность (C-непрерывность) совпадает с обычной равномерной непрерывностью.

Из леммы 4 и [18, теорема 3] следует

Лемма 5. *Для интегрального расстояния L_1 функция f тогда и только тогда A-непрерывна (L-непрерывна), когда она интегрируема по Риману.*

Характеристикой для A-непрерывности в случае хаусдорфова расстояния (H-непрерывность) является следующее утверждение.

Лемма 6. *Функция $f \in \mathrm{A}_\Omega$ H-непрерывна на Δ тогда и только тогда, если для каждой функции $g \in \mathrm{A}_\Omega$, для которой $g(x) \subset F(f;x)$, для каждой $x \in \Delta$ имеет место равенство $F(g;x)=F(f;x)$ для всех $x \in \Omega$.*

Доказательство леммы следует непосредственно из определения хаусдорфова расстояния, A-непрерывности и дополненного графика.

В [17] (см. также [5]) доказана следующая теорема о сходимости последовательности линейных положительных операторов.

Пусть $\psi(\delta)$ неубывающая непрерывная функция, $\psi(0)=0$, $0<\psi(\delta)\leqq 1$ для $\delta>0$ и пусть $\varphi \in B_\Omega$ непрерывная функция и $\varphi(x) \geqq 1$ для всех $x \in \Omega$. Рассмотрим последовательности линейных положительных операторов, заданных на B_Ω и удовлетворяющих условиям

$$\lim_{n\to\infty} r_A(L_n(1), 1)=0,\quad \lim_{n\to\infty} r_A(L_n(\psi(|x-t|)\varphi), 0)=0. \tag{4}$$

Тогда имеет место следующее утверждение

Теорема 5. *Для того, чтобы любая последовательность линейных положительных операторов, для которой выполнены условия* (4), *сходилась относительно A-расстояния на Δ к функции f, необходимо и достаточно, чтобы функция f была A-непрерывной на Δ и имело место неравенство*

$$\sup\{|f(x)|/\varphi(x): x \in \Omega\}=M_f<\infty.$$

Приведенная теорема является расширением основной теоремы П. П. Коровкина из [2] для случая неограниченных функций.

Для определения скорости сходимости последовательностей линейных положительных операторов можно использовать следующее утверждение [5].

Теорема 6. *Пусть L — линейный положительный оператор, заданный на B_Ω и $f \in B_\Omega$. Тогда для каждого $\delta > 0$ имеет место неравенство*

$$r_A(L(f), f) \leqq \tau_A(f; 2\delta) + \sup_{x \in \Delta} L(\omega(x, \delta, f); x) + M \sup_{x \in \Delta} |1 - L(1; x)|,$$

где $M = \sup\{|f(x)| : x \in \Delta\}$ *и*

$$\omega(x, \delta, f; t) = \begin{cases} 0 & \text{для } |x-t| \leqq \delta, t \in \Omega, \\ \omega(f; |x-t| - \delta) & \text{для } |x-t| > \delta, t \in \Omega. \end{cases}$$

Доказательство. Очевидно, для каждого $x \in \Delta$

(5) $$I(\delta, f; x) \leqq f(x) \leqq S(\delta, f; x).$$

Покажем, что для каждого $t \in \Omega$

(6) $$I(\delta, f; x) - \omega(x, \delta, f; t) \leqq f(t) \leqq S(\delta, f; x) + \omega(x, \delta, f; t).$$

Действительно, для $t \in [x-\delta, x+\delta] \cap \Omega$ соотношение (6) очевидно. Для $t > x+\delta$ и $t \in \Omega$ имеем

$$f(t) = f(x+\delta) + f(t) - f(x+\delta) \leqq S(\delta, f; x) + \omega(f; t-x-\delta)$$
$$= S(\delta, f; x) + \omega(x, \delta, f; t).$$

Для $t < x-\delta$ и $t \in \Omega$ имеем

$$f(t) = f(x-\delta) + f(t) - f(x-\delta) \leqq S(\delta, f; x) + \omega(x, \delta, f; t).$$

Аналогично доказывается, что $f(t) \geqq I(\delta, f; x) - \omega(x, \delta, f; t)$ для всех $t \in \Omega$. Этим (6) установлено. Из (6), используя линейность и положительность L, получаем

$$I(\delta, f; x) L(1; x) - L(\omega(x, \delta, f); x) \leqq L(f; x)$$
$$\leqq S(\delta, f; x) L(1; x) + L(\omega(x, \delta, f); x)$$

или для $x \in \Delta$ имеют место неравенства

(7) $$L(f; x) \leqq S(\delta, f; x) + M \sup_{x \in \Delta} |1 - L(1; x)| + \sup_{x \in \Delta} L(\omega(x, \delta, f); x),$$

(8) $$L(f; x) \geqq I(\delta, f; x) - M \sup_{x \in \Delta} |1 - L(1; x)| - \sup_{x \in \Delta} L(\omega(x, \delta, f); x).$$

Утверждение теоремы получается из (5), (7), (8) и условия 3) для A-расстояния в определение 6.

Отметим, что аналогичная теорема для хаусдорфова расстояния, но без участия модуля непрерывности $\omega(f; \delta)$ приближаемой функции, была доказана В. Веселиновым [19].

Следствие 1. *Пусть линейный и положительный оператор L задан на B_Ω и $f \in B_\Omega$. Тогда для каждого $\delta > 0$ имеют место неравенства*

(9) $r_A(L(f),f) \leqq \tau_A(f;2\delta)+\delta^{-1}\omega(f;\delta)\sup_{x\in\Delta} L(|x-t|;x)+M\sup_{x\in\Delta}|1-L(1;x)|,$

(10) $r_A(L(f),f) \leqq \tau_A(f;2\delta)+\delta^{-2}\omega(f;\delta)\sup_{x\in\Delta} L((x-t)^2;x)+M\sup_{x\in\Delta}|1-L(1;x)|,$

где $M=\sup\{|f(x)|:x\in\Delta\}$.

Доказательство. Достаточно заметить, что для $|x-t|>\delta$

(11) $$\omega(x,\delta,f;t)=\omega(f;|x-t|-\delta)\leqq\delta^{-1}|x-t|\,\omega(f;\delta),$$

(12) $$\omega(x,\delta,f;t)=\omega(f;|x-t|-\delta)\leqq\delta^{-2}(x-t)^2\omega(f;\delta).$$

Из определения $\omega(x,\delta,f;t)$ согласно (11) получаем (9), а согласно (12) — получаем неравенство (10).

Если обозначим $\alpha_n^2=\sup\{L(x-t)^2;x):x\in\Delta\}$, то из (10), для $\delta=\alpha_n$

(13) $$r_A(L(f),f)\leqq\tau_A(f;2\alpha_n)+\omega(f;\alpha_n)+M\sup_{x\in\Delta}|1-L_n(1;x)|.$$

Имея в виду (3), из (13) получаем

(14) $$r_A(L(f),f)\leqq 3\omega(f;\alpha_n)+M\sup_{x\in\Delta}|1-L_n(1;x)|.$$

Полученное неравенство (14) можно рассматривать как обобщение неравенств, полученных в [20, теорема 2. 3, с. 28] для равномерного расстояния. Конечно, то, что в правой стороне участвует равномерный модуль непрерывности, сильно уменьшает качество неравенства (14) для расстояний, отличных от равномерного.

Следствие 2. Пусть $K(t)$ положительное и симметрическое ядро, $\int_{-\pi}^{\pi}K(t)dt=1$. Обозначим через $\sigma(f;x)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)K(t)dt$. Тогда для каждого $\delta>0$ имеют место следующие неравенства:

$$r_A(\sigma(f);f)\leqq\tau_A(f;2\delta)+4M\int_{\delta}^{\pi}K(t)\,dt,$$

$$r_A(\sigma(f);f)\leqq\tau_A(f;2\delta)+2\delta^{-1}\omega(f;\delta)\int_{\delta}^{\pi}tK(t)\,dt,$$

где $M=\sup\{|(f(x)|:x\}$.

Если, например, возьмем для $K(t)$ ядро Джексона и рассмотрим оператор

$$J_n(f;x)=\frac{3}{2\pi n(2n^2+1)}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^4dt,$$

то из следствия 2 получаем

(15) $$r_A(J_n(f);f)\leqq\tau_A(f;2n^{-3/4})+\pi^3Mn^{-3/4},$$

(16) $$r_A(J_n(f);f)\leqq\tau_A(f;2n^{-1})+48\omega(f;n^{-1}).$$

Имея в виду (3), неравенство (16) является обобщением классической теоремы Джексона для равномерной аппроксимации непрерывных 2π-периодических функций тригонометрическими многочленами.

Оценки типа (15) и (16) могут быть получены для различных конкретных линейных положительных операторов для периодического и не-периодического случая, для конечного и бесконечного сегмента, для ограниченных и для неограниченных функций.

3. Сходимость производных линейных операторов. Естественным условием при изучении сходимости производных линейных операторов является условие кратной выпуклости [7], [10] и др.

Определение 9. *Обозначим через K_Ω^m множество всех функций $f \in A_\Omega$, для которых $D^m(f; x) \geqq 0$ для каждого $x \in \Omega$.*

Имея в виду теорему 4, определение 9 эквивалентно обычному определению выпуклости m-того порядка. Если $f \in K_\Omega^m$, то f — выпукла m-того порядка. Напомним еще раз, что при наших обозначениях K_Ω^0 состоит из всех неотрицательных функций, K_Ω^1 — из всех монотонных функций, K_Ω^2 — из функций, обычно называемых выпуклыми и т. д.

Определение 10. *Пусть оператор L задан на некотором множестве функций B_Ω и $K_\Omega^m \subset B_\Omega$. Будем называть L выпуклым m-того порядка, если для каждого $f \in K_\Omega^m$ имеет место $L(f) \in K_\Omega^m$.*

Согласно определению 10, выпуклость нулевого порядка означает положительность оператора.

Из теоремы 4 и определения 9 следует непосредственно

Лемма 7. *Если $f \in K_\Omega^m$ и k — натуральное число, $k \leqq m$, то $D^k(f) \in K_\Omega^{m-k}$.*

Рассмотрим последовательность линейных операторов $\{L_n\}_1^\infty$, заданных на некотором множестве функций $B_\Omega \subset A_\Omega$. Предположим, что для каждого $f \in B_\Omega$ функция $L_n(f)$ имеет производную m-того порядка. Здесь мы ограничимся существованием обычной производной $L_n^{(m)}(f)$, а не рассматриваем всегда существующей S-производной $D^m(L_n(f))$. Это ограничение не очень существенно, так как обычно рассматриваемые линейные операторы весьма гладки.

Если линейные операторы $\{L_n\}_1^\infty$ выпуклы m-того порядка, то операторы $\{L_n^{(m)}\}_1^\infty$ положительны. Тогда имея в виду теорему 5, естественно ожидать, что необходимое условие сходимости последовательности $\{L_n^{(m)}(f)\}_1^\infty$ относительно некоторого A-расстояния должно быть A-непрерывность $D^m(f)$. Для равномерного расстояния это эквивалентно существованию и непрерывности обычной производной $f^{(m)}$.

Наша задача в дальнейшем будет установление достаточных условий сходимости последовательности $\{L_n^{(m)}(f)\}_1^\infty$ относительно произвольного A-расстояния. Оказывается, что здесь очень плодотворно можно использовать понятие S-производной, которая всегда существует.

Для каждой интегрируемой на $\Omega=[a, b]$ функции $f \in A_\Omega$ определим оператор

$$\mathrm{I}_k(f; x)=\int_a^x ((x-t)^{k-1}/(k-1)!)\, f(t)\, dt; \quad k=1, 2, 3, \ldots \tag{17}$$

Очевидно, для каждой интегрируемой функции f функция $\mathrm{I}_k(f; x)$ имеет производные до k-того порядка и

$$\mathrm{I}_k^{(k)}(f; x)=f(x); \quad x \in \Omega. \tag{18}$$

Лемма 8. *Если $f \in \Delta_\Omega$ имеет ограниченную S-производную k-того порядка, то функции*

$$f_1(x) = f(x) - \mathsf{l}_k(I(D^k(f)); x)$$

и

$$f_2(x) = \mathsf{l}_k(S(D^k(f)); x) - f(x)$$

выпуклы k-того порядка, т. е. $f_1, f_2 \in K_\Omega^k$.

Доказательство. Так как $D^k(f)$ ограниченная функция, то ее функции Бэра

$$\varphi(x) = I(D^k(f); x), \quad \psi(x) = S(D^k(f); x) \tag{19}$$

интегрируемы. Согласно второй части теоремы 3 и (18), получаем

$$D^k(f_1; x) = D^k(f; x) - I(D^k(f; x)) \geqq 0,$$

$$D^k(f_2; x) = S(D^k(f; x)) - D^k(f; x) \geqq 0,$$

так как для каждой $g \in \Delta_\Omega$

$$I(g; x) \leqq g(x) \leqq S(g; x); \; x \in \Omega.$$

Имея в виду определение 9, лемма доказана.

Пусть L — линейный и выпуклый оператор k-того порядка, заданный на $B_\Omega \subset \Delta_\Omega$, и для каждой $f \in B_\Omega$ функция $L(f)$ имеет k-тую производную $L^{(k)}(f)$. Согласно лемме 8, имея в виду обозначения (19), функции

$$L(f; x) - L(\varphi; x) \quad \text{и} \quad L(\psi; x) - L(f; x)$$

принадлежат K_Ω^k. Тогда согласно второй части теоремы 3 и существованию k-той производной $L^{(k)}(f)$, получаем, что для каждой $x \in \Omega$ имеет место неравенство

$$Q(\varphi; x) \leqq L^{(k)}(f; x) \leqq Q(\psi; x), \tag{20}$$

где

$$Q(f) = L^{(k)}(\mathsf{l}_k(f)). \tag{21}$$

Не трудно увидеть, что оператор (21) линеен и положителен.

Лемма 9. *Пусть L — линейный и выпуклый оператор k-того порядка, заданный на $B_\Omega \subset \Delta_\Omega$, $\Omega = [a, b]$, для которой $L(f)$ имеет k-тую производную для каждой $f \in B_\Omega$. Пусть $f \in B_\Omega$ и имеет A-непрерывную k-тую S-производную. Тогда имеет место следующее неравенство*

$$r_A(D^k(f), L^{(k)}(f)) \leqq 2r_A(\psi, Q(\psi)) + r_A(\varphi, Q(\varphi)), \tag{22}$$

где φ, ψ и Q определяются через (19) *и* (21).

Доказательство. Так как $D^k(f)$ A-непрерывна, то

$$r_A(D^k(f); \psi) = r_A(\varphi, \psi) = 0.$$

Имея в виду этого, неравенство (20) и свойства A-расстояния, получаем последовательно:

$$r_A(D^k(f),\ L^{(k)}(f)) \leqq r_A(D^k(f), \psi) + r_A(\psi, Q(\psi)) + r_A(Q(\psi), L^{(k)}(f))$$
$$\leqq r_A(\psi, Q(\psi)) + r_A(Q(\psi), Q(\varphi)) \leqq r_A(\psi, Q(\psi)) + r_A(Q(\psi), \psi)$$
$$+ r_A(\psi, \varphi) + r_A(\varphi, Q(\varphi)) = 2r_A(\psi, Q(\psi)) + r_A(\varphi, Q(\varphi)).$$

Этим лемма доказана.

Из леммы 9 и следствия 1 получаем

Теорема 7. *Пусть L — линейный и выпуклый оператор k-того порядка, заданный на $B_\Omega \subset \Delta_\Omega$, $\Omega=[a, b]$, для которого $L(f)$ имеет k-тую производную для каждой $f \in B_\Omega$. Пусть $f \in B_\Omega$ и f имеет A-непрерывную k-тую S-производную. Тогда имеет место следующее неравенство:*

$$r_A(D^k(f);\ L^{(k)}(f)) \leqq 3\tau_A(D^k(f);\ 2\delta) + 3M\varepsilon(L^{(k)}) + 3\delta^{-2}\omega(D^k(f);\ \delta)\alpha(L^{(k)}), \tag{23}$$

где

$$M = \sup_{x\in\Delta} |D^k(f;x)|;\ \Delta \subset \Omega,$$

$$\varepsilon(L^{(k)}) = \sup_{x\in\Delta} \left|1 - \frac{1}{k!}L^{(k)}((t-a)^k;\ x)\right|,$$

$$\alpha(L^{(k)}) = \sup_{x\in\Delta}\Big\{\frac{2}{(k+2)!}L^{(k)}((t-a)^{k+2};\ x) - \frac{2(x-a)}{(k+1)!}L^{(k)}((t-a)^{k+1};\ x)$$
$$+ \frac{(x-a)^2}{k!}L^{(k)}((t-a)^k;\ x)\Big\}.$$

Доказательство. Так как оператор Q линеен и положителен, а для каждого A-непрерывного $g \in \Delta_\Omega$ имеют место равенства

$$\tau_A(g;\ \delta) = \tau_A(I(g);\ \delta) = \tau_A(S(g);\ \delta)$$

и

$$\omega(g;\ \delta) = \omega(I(g);\ \delta) = \omega(S(g);\ \delta),$$

то из (10) и (22) получаем

$$r_A(D^k(f),\ L^{(k)}(f)) \leqq 3\tau_A(D^k(f);\ 2\delta) + 3M \sup_{x\in\Delta}|1 - Q(1;\ x)| \tag{24}$$
$$+ 3\delta^{-2}\omega(D^k(f);\ \delta) \sup_{x\in\Delta} Q((x-t)^2;\ x).$$

Значения I_k для $f(x)=1$ и $f(x)=(\xi-x)^2$ вычисляются непосредственно

$$\mathsf{I}_k(1;\ x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}\,dt = \frac{1}{k!}(x-a)^k,$$

$$\mathsf{I}_k((\xi-t)^2;\ x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}(\xi-t)^2}{(k-1)!}\,dt$$

$$= 2(x-a)^{k+2}/(k+2)! - 2(\xi-a)(x-a)^{k+1}/(k+1)! + (\xi-a)^2(x-a)^k/k!$$

и из (24) получается (23).

Доказанную теорему можно рассматривать как обобщение теоремы 2.1 из [10], относящуюся к равномерному расстоянию. В [10] делается дополнительное предположение об операторе L. Там предполагается, что L

изображает все алгебраические многочлены степени $k-1$ в алгебраические многочлены степени не выше $k-1$.

Интересно найти простые условия для оператора L, при выполнении которых обеспечивалась бы равномерная сходимость $L^{(k)}((t-a)^{k+i}, x)$ к функции $(x-a)^i(k+i)/i!$ для $i=0, 1, 2$, на Ω. В [8] доказано, что это имеет место, если оператор L выпуклый порядка m для $m=0, 1, 2, \ldots, k$ но сходимость имеет место на каждый сегмент $\Delta=[c, d]\subset\Omega=[a, b]$, где, $a<c<d<b$. Таким образом получаем следующее утверждение:

Теорема 8. *Пусть $\{L_n\}_1^\infty$ последовательность линейных операторов, заданных на множестве функций $B_\Omega\subset A_\Omega$, $\Omega=[a, b]$, которые выпуклы порядка m для $m=0, 1, 2, \ldots, k$. Пусть выполнены условия П. П. Коровкина*

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\Delta}|1-L_n(1\,;\,x)|=0, \quad \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\Delta}L_n(|x-t|,\,x)=0.$$

Предполагаем еще, что для каждого $f\in B_\Omega$ функция $L_n(f)$ имеет производную k-того порядка $L^{(k)}(f)$. Тогда для каждой A-непрерывной на $\Omega=[a, b]$ функции f и для каждой $\Delta=[c, d]\subset\Omega$, $a<c<d<b$, имеет место равенство $\lim_{n\to\infty}r_A(L^{(i)}(f), D^i(f))=0$ для $i=0, 1, 2, \ldots, k$.

Доказанная теорема имеет многочисленные следствия, которые получаются при специальном выборе A-расстояния или операторов.

Оценку о скорости сходимости последовательных производных определенных операторов к соответствующим S-производным рассматриваемой функции можно получить из теоремы 7.

Приведем только один пример. Рассмотрим функцию $\theta(x)=|x-1/2|$ Не трудно увидеть, что

$$D(\theta\,;\,x)=\begin{cases} -1 & \text{для } x\in[0, 1/2),\\ [-1, 1] & \text{для } x=1/2\\ 1 & \text{для } x\in[1/2, 1].\end{cases}$$

Функция θ A-непрерывна для всех L_p расстояний и для хаусдорфова расстояния (она L_p-непрерывна и H-непрерывна). Если возьмем последовательность операторов С. Н. Бернштейна

$$B_n(f\,;\,x)=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}f\left(\frac{\nu}{n}\right)x^\nu(1-x)^{n-\nu}$$

(они являются выпуклыми произвольного порядка), то согласно теореме 8 последовательность $\{B'_n(\theta\,;\,x)\}_1^\infty$ сходится к $D(\theta\,;\,x)$ относительно хаусдорфова расстояния и относительно каждого L_p-расстояния для $p\geqq 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. П. Коровкин. Опыт аксиоматического построения некоторых вопросов теории приближений функций одного переменного. *Ученые записки Казанского гос. пед. инст.*, 69, 1969, 91—109.
2. П. П. Коровкин. Опыт аксиоматического построения некоторых вопросов теории приближения. Конструктивная теория функций (Труды междунар. конф. Варна, 1970). София, 1972, 55—63.

3. M. W. M ü l l e r. Approximation unbeschränkter Funktionen bezüglich einer Korovkin-Metrik. Теория приближения функции (Труды междунар. конф. по теор. прибл. функций, Калуга 24—28 июля 1975). Москва, 1977, 269—271.
4. G. S c h m i d. Approximation unbeschränkter Funktionen. Dissertation, Stuttgart, 1972.
5. Bl. S e n d o v. Convergence of sequences of monotonic operators in *A*-distance. *C. R. Acad. bulg. Sci.*, **30**, 1977, No 5, 657—660.
6. П. П. К о р о в к и н. О сходимости линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций. *Доклады АН СССР*, **90**, 1953, 961—964.
7. Бл. С е н д о в, В. П о п о в. О сходимости производных линейных положительных операторов. *Доклады БАН*, **22**, 1969, № 5, 507—509.
8. Бл. С е н д о в, В. А. П о п о в. Сходимост на производните на линейни положителни оператори. *Известия Мат. инст. БАН*, 11, 1969, 107—115.
9. В. А. П о п о в, В. М. В е с е л и н о в. Несколько замечаний о производных линейных положительных операторов. *Годишник Соф. унив., Мат. фак.*, **64**, 1971, 143—152.
10. H.-B. K n o o p, P. P o t t i n g e r. Ein Satz von Korovkin-Typ für C^k-Räume. *Math. Z.*, **148**, 1976, 23—32.
11. Bl. S e n d o v. Segment Arithmetic and Segment Limit. *C. R. Acad. bulg. Sci.*, **30**, 1977, № 7, 955—958.
12. Bl. S e n d o v. Segment Derivatives and Taylor's. Formula. *C. R. Acad. bulg. Sci.*, **30**, 1977, № 8, 1093—1096.
13. R. E. M o o r e. Interval analysis Englewood. Cliffs, N. J. 1958.
14. H. R a t s c h e k. Die Subdistributivität der Intervallarithmetik. *Z. angew. Math. Mech.*, **51**, 1971, 189—192.
15. E. M i c h a e l. Topologies on spaces of subsets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **71**, 1951, 152—182.
16. Бл. С е н д о в. Некоторые вопросы теории приближений функций и множеств в Хаусдорфовой метрике. *Успехи мат. наук*, **24**, 1969, 5 (149), 141—178.
17. Bl. S e n d o v. Approximation with monotonic operators in *A*-distance. Linear Spaces and Approximation (Proc. of Oberwoltach conference, Aug. 20—27, 1977) (в печати).
18. Бл. С е н д о в, В. А. П о п о в. О некоторых свойствах хаусдорфовой метрики. Mathematica (Cluj), **8** (31), 1966, 163—172.
19. В. М. В е с е л и н о в. О точном порядке приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна в метрике Хаусдорфа. *Мат. заметки*, **12**, 1972, № 5, 501—510.
20. R. A. D e V o r e. The Approximation of Continuous Functions by Positive Linear Operators. Berlin, 1972.

*Центр математики
и механики п. я. 373
1000 София Болгария*

Получено 10. 10. 1977.