КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'77
София . 1980, с. 145—149

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'77
Sofia . 1980, p. 145—149

НЕКОТОРЫЕ ОБРАТНЫЕ ТЕОРЕМЫ В МЕТРИКЕ ХАУСДОРФА

С. П. Ташев

Резюме. В статье получены условия для непрерывности функции, если известно, как стремятся к нулю наилучшие хаусдорфовые приближения функции f алгебраическими и тригонометрическими полиномами, или известно, как стремятся к нулю хаусдорфовые расстояния между функцией f и заданной последовательностью линейных положительных операторов.

Получены оценки модуля H-непрерывности функции f через хаусдорфовое расстояние между f и заданной последовательностью линейных положительных операторов.

Пусть Φ_Δ — множество ограниченных функций, заданных на интервале Δ. Если функции 2π-периодические, будем писать $\Phi_{2\pi}$. Через $r(\alpha; \varphi_1, \varphi_2)$ будем обозначать хаусдорфовое расстояние с параметром α между дополненными графиками φ_1, φ_2 функции φ_1, φ_2 из Φ_Δ (см. [1]).

1. Обратные теоремы при аппроксимации полиномами. В [1], используя неравенства Бернштейна и Маркова, Сендов получил следующие обратные теоремы для функции f через наилучшее хаусдорфовое приближение с параметром α алгебраическими $(E_n(\alpha, [a, b]; f))$ или тригонометрическими $(E_n(\alpha, 2\pi; f))$ полиномами: Если $E_n(\alpha, 2\pi; f) = o(1/n)$ или $E_n(\alpha, [a, b]; f) = o(1/n)$, или $E_n(\alpha, [a, b]; f) = o(1/n^2)$, то f непрерывна соответственно на $(-\infty, \infty)$, (a, b), $[a, b]$.

Оказывается, что в обратных теоремах в метрике Хаусдорфа важен не только порядок наилучших приближений, а и их точная асимптотика. Е. Долженко и Е. Севастьянов [2] показали, что, если

$$\varliminf_{n\to\infty} n E_n(\alpha, 2\pi; f) < \pi/3\alpha, \tag{1}$$

то f непрерывна. С другой стороны, для функции f^*, $f^*(x) = [-1, 1]$, $x \in (-\infty, \infty)$ имеет место $\varliminf_{n\to\infty} nE_n(\alpha, 2\pi; f^*) = \pi/2\alpha$.

В совместной работе с Петрушевым [3] доказали, что точная константа, которая должна стоять в правой части неравенства [1], равняется $\pi/2\alpha$.

Теорема 1. *Пусть $f \in \Phi_{2\pi}$. Если*

$$\varliminf_{n\to\infty} nE_n(\alpha, 2\pi; f) < \pi/2\alpha, \tag{2}$$

то f непрерывна. Константа $\pi/2\alpha$ в правой части (2) *точна, т. е. существует $f_1 \in \Phi_{2\pi}$, f_1 — разрывна и*

$$\lim_{n\to\infty} n\, E_n(\alpha, 2\pi; f_1) = \pi/2\alpha. \tag{3}$$

Справедливо аналогичное утверждение для приближений алгебраическими полиномами, которые учитывает эффект Никольского на концах интервала.

Теорема 2. *Пусть $f \in \Phi_{[-1,1]}$*.

а. *Если для любого $x \in (-1, 1)$ $\varlimsup_{n\to\infty} n\, |f(x) - P_n(x)|_\alpha / \sqrt{1-x^2} < \pi/2\alpha$, то f непрерывна на $(-1,1)$, где P_n — полином наилучшего хаусдорфова приближения f, а $|f(x) - P_n(x)|_\alpha$ — хаусдорфовая разница с параметром α между P_n и дополненным графиком функции f в точке x* (см. [3]). *Константа $\pi/2\alpha$ точна, т. е. для любого $x \in (-1, 1)$ существует $f_2 \in \Phi_{[-1,1]}$, f_2 — разрывна в точке x, такая, что*

$$\varlimsup_{n\to\infty} n\, |f_2(x) - P_n(x)|_\alpha / \sqrt{1-x^2} = \pi/2\alpha.$$

Из [3] *не вытекает, что f непрерывна на $[-1, 1]$.*

б. *Если*

$$\lim_{n\to\infty} n^2 E_n(\alpha, [-1, 1]; f) < \pi^2/2\alpha,$$

то f непрерывна на $[-1, 1]$. Константа $\pi^2/2\alpha$ точна, т. е. существует $f_3 \in \Phi_{[-1,1]}$, f_3 — разрывна в точке $x = 1$ и такая, что

$$\lim_{n\to\infty} n^2 E_n(\alpha, [-1, 1]; f_3) = \pi^2/2\alpha.$$

2. Обратные теоремы при аппроксимации линейными положительными операторами. Метод Бл. Сендова [1] можно применить без изменения и в случае приближения линейными положительными операторами. Например, для оператора Валле—Пуссена

$$v_n(f; x) = ((2n)!! / (2n-1)!! . 2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \cos^{2n}(t/2) dt$$

этим методом получается утверждение: Если для функции $f \in \Phi_{2\pi}$ выполнено $r(\alpha; f, v_n(f)) = o(1/n^{-1/2})$, $n \to \infty$, то f непрерывна. Веселинов [4] получил: Если для $f \in \Phi_\Delta$ ($\Delta = 2\pi$, $[0, 1]$, $(-\infty, \infty)$) выполнено $r(\alpha; f, U_n(f)) = O(n^{-1/2})$, $n \to \infty$, то f может иметь разрывы только второго рода, где $U_n(f)$ или оператор Валле—Пуссена или Бернштейна ($B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f(k/n) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$) или Гаусса — Вайерштрасса ($W_n(f; x) = (\pi/n)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-n(t-x)^2) dt$).

Оказывается, что при этих ограничениях можно утверждать, что f непрерывна. Это утверждение получается как следствие из следующих теорем:

Теорема 3. *Пусть функция $f \in \Phi_{(-\infty, \infty)}$, последовательность $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ такая, что $\alpha_n > 0$, $\alpha_n \to 0$, $n \to \infty$ и ядро оператора*

$$L_n(f; x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) K_n(t)\, dt; \quad n = 1, 2, \ldots$$

удовлетворяет следующим условиям:

(4)
а) $K_n(t)\geqq 0$, *б)* $K_n(t)=K_n(-t)$,

в) $\int_{-\infty}^{\infty} K_n(t)dt=1$, *г)* $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\delta}^{\infty} K_n(t)dt=0,\ \delta>0$,

д) $K_n(t-x)\geqq C_1(\theta)\alpha_n^{-1}$ *для любых* $\theta>0,\ |t-x|\leqq\theta\alpha_n$,

е) $K_n(t)$ — *монотонно невозрастающая функция на* $[0,\infty)$.

Тогда, если $r(\alpha;f,L_n(f))=O(\alpha_n),\ n\to\infty$, *то* f *непрерывна.*

Теорема 3 доказывается, используя следующие две леммы. Пусть

$$\sigma_B(x)=\begin{cases}-B, & -\infty<x\leqq 0,\\ B, & 0<x<\infty.\end{cases}$$

Лемма 1. *Если* $\theta>0$, *то* $L_n(\sigma_B,-\theta\alpha_n)\geqq -B+C_2(\theta).B$, $L_n(\sigma_B,\theta\alpha_n)\leqq B-C_2(\theta).B$, *где* $C_2(\theta)=\min(1/4,\ 2\theta\, C_1(2\theta))$.

Лемма 2. *Пусть функция* $f\in\Phi_{(-\infty,\infty)}$, $|f(x)|\leqq|\sigma_B(x)|$ *и* $\delta>0$. *Тогда для любых точек* $x_1,x_2\in[-\delta,\delta]$ *одновременно невозможно, чтобы были выполнены следующие два неравенства:*

$$L_n(f;x_1)>L_n(\sigma_B,\delta),\quad L_n(f;x_2)<L_n(\sigma_B,-\delta).$$

Заметим, что утверждение, аналогичное теореме 3, справедливо и для операторов $\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_n(t)dt$ в 2π-периодическом случае. Сформулируем аналог теоремы 3 для сумматорных операторов:

Теорема 4. *Пусть функция* $f\in\Phi_{[a,b]}$, *последовательность* $\{\alpha_n\}_1^\infty$ *такая, что* $\alpha_n>0,\ \alpha_n\downarrow 0,\ n\to\infty$ *и* $S_n(f;x)=\sum\limits_k f(x_{k,n})p_{k,n}(x)$, *где* $x_{k,n}\in[a,b]$ *и* $p_{k,n}(x)$ *удовлетворяет условиям:*

(5)
а) $p_{k,n}(x)\geqq 0$, *б)* $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{|x_{k,n}-x|>\delta} p_{k,n}(x)=0,\ \delta>0,\ x\in\Delta'\subset(a,b)$,

в) $\sum\limits_k p_{k,n}(x)=1$,

г) $\sum\limits_k p_{k,n}(x)\geqq c_3(\theta)>0$ *для любых* $\theta>0,\ x\in\Delta',\ |x_{k,n}-x|\leqq\theta\alpha_n$,

д) $p_{k,n}(x)$ — *монотонно неубывает налево от* $x_{k,n}$ *и монотонно невозрастает направо от* $x_{k,n}$. *Тогда, если* $r(\alpha;f,S_n(f))=O(\alpha_n),\ n\to\infty$, *то* f *непрерывна на* Δ'.

Применим теоремы 3 и теоремы 4 для конкретных операторов. Рассмотрим оператор Гаусса—Вайерштрасса. Имеем:

$$K_n(t-x)=(n/\pi)^{1/2}\exp(-n(t-x)^2)\geqq(n/\pi)^{1/2}\exp(-\theta^2)$$

для $|t-x|\leqq\theta/n^{1/2}$. Следовательно, здесь $\alpha_n=n^{-1/2}$. Кроме этого, все остальные условия (4) выполнены. Тогда из теоремы 3 получаем:

Следствие 1. Если $f\in\Phi_{(-\infty,\infty)}$ и $r(\alpha;f,W_n(f))=O(n^{-1/2})$, то f непрерывна.

Для оператора Валле—Пуссена $\alpha_n=n^{-1/2}$, так как

$$K_n(t)=((2n)!!/2\pi(2n-1)!!).\cos^{2n}t/2\geqq(\sqrt{2n}/(2\pi))(1-t^2/4)^{2n}$$

$$\geqq(\sqrt{2n}/2\pi)(1-\theta^2/4n)^{2n}\geqq(\sqrt{2n}/2\pi)\exp(-\theta^2)$$

для $|t|\leqq\theta/\sqrt{n}$. Тогда из периодического аналога теоремы 3 получаем

Следствие 2. Если $f \in \Phi_{2\pi}$ и $r(\alpha; f, V_n(f)) = O(n^{-1/2})$, $n \to \infty$, то f непрерывна. Для многочленов Бернштейна имеем:

$$p_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (1+\varepsilon_n)/(2\pi n x(1-x))^{1/2} \exp(-(k-nx)^2/2nx(1-x)),$$

где $k = nx + t\sqrt{nx(1-x)}$, $t \in [-2\sqrt{\ln n},\ 2\sqrt{\ln n}]$, $x \in [n^{-5/6},\ 1-n^{-5/6}]$ и $\varepsilon_n \to 0$, $n \to \infty$ (см. [5]). Кроме этого, $\sum_{|k/n-x|>\delta} p_{k,n}(x) \leqq \delta^{-2} nx(1-x)$ (см. [6]). Тогда условия [5] будут выполнены при $\alpha_n = n^{-1/2}$. Следовательно, получаем

Следствие 3. Если $f \in \Phi_{[0,1]}$ и $r(\alpha; f, B_n(f)) = O(n^{-1/2})$, $n \to \infty$, то f непрерывна в $(0, 1)$.

Рассмотрим оператор Сас—Миракяна

$$M_n(f; x) = \exp(-nx) \sum_{k=0}^{\infty} f(k/n)(nx)^k/k!.$$

Пусть $\Delta' = [a, b]$, $a > 0$, $b < \infty$; $x \in \Delta'$ и $k = nx + t\sqrt{nx}$, где $|t| \leqq \theta/\sqrt{x}$ и $k/n \in \Delta'$. Используя формулу Стирлинга, получаем:

$$\begin{aligned} p_{k,n}(x) &= \exp(-nx)(nx)^k/k! \geqq \exp(-nx)(nx)^k/(e\sqrt{2\pi k}\,.\,k^k\,.\exp(-k)) \\ &\geqq \exp(k-nx)(nx)^k/(e\sqrt{2\pi k}.\ k^k) \geqq \exp(t\sqrt{nx})(1+t/\sqrt{nx})^{-nx-t\sqrt{nx}}/ \\ &(e\sqrt{2\pi(nx+\theta\sqrt{n})}) \geqq \exp(t\sqrt{nx})\,.\exp(-t\sqrt{nx})/(e\sqrt{2\pi(nx+\theta\sqrt{n})}) \\ &\geqq C_4(\theta)\, n^{-1/2}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\alpha_n = n^{-1/2}$ и можно утверждать:

Следствие 4. Если $f \in \Phi_{[0,\infty)}$ и $r(\alpha; f, M_n(f)) = O(n^{-1/2})$, $n \to \infty$, то f непрерывна в $(0, \infty)$.

3. Оценки модуля H-непрерывности $\tau(f, \delta)_r$ через хаусдорфовое расстояние между функцией f и последовательностью линейных положительных операторов. Пусть $f \in \Phi_{(-\infty,\infty)}$ и

$$S(f, \delta; x) = \sup\{y : y \in f(t),\ t \in [x-\delta, x+\delta]\},$$
$$I(f, \delta; x) = \inf\{y : y \in f(t),\ t \in [x-\delta,\ x+\delta]\}.$$

Тогда определяем $\tau(f, \delta)_r = r(1; s(f, \delta), I(f, \delta))$. Известно, что, если $\tau(f, \delta)_r \to 0$, $\delta \to 0$, то $r(1; f, L_n(f)) \to 0$, $n \to \infty$, где $L_n(f)$ — последовательность линейных положительных операторов (см. [7]). Стоит вопрос: Можно ли утверждать, что $\tau(f, \delta)_r \to 0$, $\delta \to 0$, если $r(1; f, L_n(f)) \to 0$, $n \to \infty$, для некоторых последовательностей линейных положительных операторов? Оказывается, что это не так. Пусть $C_n(f; x) = (n/2)\int_{x-1/n}^{x+1/n} f(t)dt$ — функции Стеклова. Тогда справедливо следующее утверждение:

Теорема 5. *Существует функция $f \in \Phi_{(-\infty,\infty)}$ такая, что $\tau(f, \delta)_r = 1$ для каждого δ и $r(1; f, C_n(f)) \leqq a_1/n^{1/2}$, $n = 1, 2, \ldots$, где a_1 абсолютная константа.*

Но если $r(1; f, C_n(f))$ стремится к нулю быстрее, чем $n^{-3/4}$, то можно утверждать, что $\tau(f, \delta)_r \to 0$, $\delta \to 0$.

Теорема 6. *Пусть $f \in \Phi_{(-\infty,\infty)}$. Тогда*

$$\tau(f, \delta)^2{}_r \leqq a_2 \sum_{i=1}^{n} r(1; f, C_i(f))/n^{1/4},\ \delta \leqq n^{-1},$$

где a_2 — абсолютная константа.

Подобное утверждение можно получить и для других интегральных операторов. Например, если $W(f; x)$ оператор Гаусса—Вайерштрасса, то справедлива

Теорема 7. *Пусть функция* $f \in \Phi_{(-\infty,\infty)}$. *Тогда* $\tau(f, \delta)^3{}_r \leq a_3 \sum_{i=1}^{n} r(1; f, W_i(f))/n^{23/40}$, *где* a_8 — *абсолютная константа.*

В заключение отметим, что нам не известен точный порядок в оценках теорем 6 и 7.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бл. Сендов. Некоторые вопросы теории приближений функций и множеств в хаусдорфовой метрике. *Успехи мат. наук*, 24, 1969, № 5, 141—178.
2. Е. П. Долженко, Е. А. Севастьянов. О приближениях функций в хаусдорфовой матрике. *Доклады АН СССР*, 226, 1976, № 4, 768—770.
3. П. Петрушев, Сп. Ташев. Некоторые обратные теоремы в метрике Хаусдорфа. *Доклады БАН*, 29, 1976, № 12, 1721—1724.
4. В. Веселинов. Обратные теоремы для хаусдорфова приближения функций линейными операторами. *Доклады БАН*, 29, 1976, № 2, 159—162.
5. C. G. Essen. Über die asymptotisch beste Approximation stetiger Funktionen mit Hilfe von Bernstein-Polynomen. *Numer. Math.*, 2, 1976, Nr. 4, 206—213.
6. G. G. Lorentz. Bernstein polynomials. Toronto, 1953.
7. В. Веселинов. О порядке приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна в метрике Хаусдорфа. *Мат. заметки*, 12, 1972, № 5, 501—509.

Центр математики
и механики п. я. 373
1090 София, Болгария

Получено 1. 9. 1977