КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'77
София. 1980, с. 151—160

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'77
Sofia. 1980, p. 151—160

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ СПЛАЙНАМИ НА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ СЕТКЕ

Г. А. Тотков

Резюме. Пусть $\Omega=[0,1]\times[0,1]$, $S(k,n)$ — множество кусочно-полиномиальных функций степени k, каждая из которых определяется разбиением Ω на не более чем n прямоугольников, E^k_{n,L_p} — наилучшее L_p-приближение функции f элементами из $S(k,n)$ $(1\leq p\leq\infty,\ L_\infty\equiv C)$. Через $V_T(f)$ обозначим вариацию Тонелли функции f. Доказаны многомерные аналоги некоторых теорем Г. Фройда и В. Попова. В частности, E^k_{n,L_p} оценивается посредством $V_T(D^\alpha f)$, где $|\alpha|=k$, $D^\alpha=\partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}$. Как следствие получены результаты о приближениях некоторых классов функций, производные которых $D^\alpha f$, $|\alpha|=k-1$, абсолютно непрерывные в Ω.

Хорошо известен следующий результат [1]: если функция f, определенная на отрезке $[0,1]$, обладает $(k-1)$-вой производной, которая является интегралом функции $f^{(k)}$ ограниченной вариации, то для наилучшего одностороннего приближения $\widetilde{E}^k_{\Sigma_n,L}(f)$ функции f сплайнами (k,n)-ого порядка с фиксированными узлами $\Sigma_n=\{x_i : i=0,1,\dots,n;\ \ 0=x_0\leq\dots\leq x_n=1\}$ в метрике $L([0,1])$ выполнено:

$$\widetilde{E}^k_{\Sigma_n,L}(f)=O[V_0^1(f^{(k)})\Delta_n^{k+1}],\ \text{где}\ \Delta_n=\max_i(x_{i+1}-x_i). \tag{1}$$

При тех же предположениях относительно функции f для наилучшего приближения E^k_{n,L_p} функции f сплайнами (k,n)-ого порядка (со свободными узлами) в метрике $L_p([0,1])$, $1\leq p\leq\infty$ в [1] доказано:

$$E^k_{n,L_p}(f)=O[n^{-(k+1)}V_0^1(f^{(k)})]. \tag{2}$$

Уточняя методы, развитые в [1], В. А. Попов [2] показал, что если функция f имеет на интервале $[0,1]$ абсолютно непрерывную производную $f^{(k-1)}$, то для наилучшего равномерного приближения функции f сплайнами (k,n)-ого порядка:

$$E^k_n(f)=o(n^{-k}). \tag{3}$$

В первой части этой работы доказаны двумерные аналоги оценки (1), используя вариации Витушкина—Кронрода и Витали—Харди. Исследована связь между вариациями Витушкина—Кронрода и интегральным модулем непрерывности функции.

Во второй части получены двумерные оценки типа (2) с участием вариации Тонелли и Витали—Харди. Доказана двумерная оценка типа (3) для некоторых классов абсолютно непрерывных функций двух переменных.

Аппроксимирующим аппаратом являются разные классы двумерных сплайнов на прямоугольных сетках с дефектами.

0. Обозначения и понятия. Пусть $\Omega=[0,1]\times[0,1]$ и

(4) $$\Sigma_n^2=\{(x_1^i,x_2^j):i,j=0,1,\ldots,n;\ 0=x_p^0\leqq\ldots\leqq x_p^n=1,\ p=1,2\}\ —$$

заданная система из не более чем $(n+1)^2$ точек Ω. Далее

$$\Delta_n^p=\max\{x_p^{i+1}-x_p^i:i=0,1,\ldots,n-1\},\ p=1,2;\ \Delta_n=\max(\Delta_n^1,\Delta_n^2).$$

Через $S(k,\Sigma_n^2)$ обозначим множество всех функций $S(x_1,x_2)$, определенных на Ω и такие, что

(5) $$S(x_1,x_2)=\sum_{0\leqq m+l\leqq k}Q_{ml}^{ij}x_1^m x_2^l,\ \text{для}\ (x_1,x_2)\in\Delta_{ij},$$

(6) $$\Delta_{ij}=\{(x_1,x_2):x_1^i\leqq x_1<x_1^{i+1},\ x_2^j\leqq x_2<x_2^{j+1}\},\ i,j=0,1,\ldots,n-1,$$

(7) для $i=n-1$ (или $j=n-1$) неравенство $x_p^{n-1}\leqq x_p<x_p^n$ в (6) заменяем на $x_p^{n-1}\leqq x_p\leqq x_p^n$, $p=1$ (или $p=2$).

Пусть $S(k,n,\varrho)=US(k,\Sigma_n^2)$, где объединение взято по всевозможным системам Σ_n^2 в Ω, класс $S(k,N)$ состоит из всех функций $S(x)$, для которых существуют не более чем N попарно непересекающихся прямоугольников Δ_{ij}(Δ_{ij} — не обязательно замкнутые) покрывающие Ω и такие, что для $S|\Delta_{ij}$ выполнено (5), а класс $S_1(k,n)$ — это множество всех функций $S(x)$, заданных на Ω, для которых существуют такие узлы $\{(x_1^i,x_2^{ij}):i=0,1,\ldots,n;\ j=0,1,\ldots,n;\ 0=x_1^0\leqq\ldots\leqq x_1^n=1,0=x_2^{i,0}\leqq\ldots\leqq x_2^{i,n}=1\}$, что в Δ_{ij}(см. (6) и (7)) $S(x_1,x_2)$ имеет представление (5). Аналогично определим и класс функций $S_2(k,n)$.

Рассмотрим следующие характеристики функции f, заданной на Ω:

а) наилучшие приближения $E^k_{\Sigma_{n,R}^2}(f)$, $E^k_{N,R}$, $E^k_{n^2,R,\varrho}(f)$ и $E^k_{n^2,R,i}(f)$ функции f элементами из $S(k,\Sigma_n^2)$, $S(k,N)$, $S(k,n,\varrho)$ и $S_i(k,n)$ $(i=1,2)$ относительно метрики R на Ω, например,

$$E^k_{\Sigma_n^2,R}(f)=\inf\{R(f,s):s\in S(k,\Sigma_n^2)\}.$$

В качестве $R(f,g)$ берется интегральное расстояние в $L_p(\Omega)$ $\{\int_\Omega|f(x)-g(x)|^p dx\}^{\frac{1}{p}}$, $1\leqq p\leqq\infty$ или равномерное расстояние в $C(\Omega)$ $\sup\{|f(x)-g(x)|:x\in\Omega\}$.

б) наилучшее одностороннее приближение функции f сплайнами из $S(k,\Sigma_n^2)$ и $S(k,n,\varrho)$ в $L_p(\Omega)$, $1\leqq p\leqq\infty$. Например,

$$\widetilde{E}^k_{\Sigma_n^2,L_p}(f)=\inf\{\|p-g\|_{L_p(\Omega)}:p,g\in S(k,\Sigma_n^2);\ p(x)\leqq f(x)\leqq g(x),\ x\in\Omega\}.$$

в) полный модуль гладкости k-ого порядка в L_p

$$\omega_k(f;\ \delta_1, \delta_2)L_p = \sup\{\| \Delta_h^k f(x)\|_{L_p(\Omega_{kh})} : h=(h_1, h_2),\ 0\leq h_i\leq\delta_i,\ i=1,2\},$$

где $\Delta_h^k f(x)=\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}\binom{k}{l}f(x+lh)$, а $\Omega k_h=[0,1-kh_1]\times[0,1-kh_2]$.

г) полный модуль непрерывности функции f

$$\omega(f;\ \delta_1, \delta_2)=\sup\{|f(x+h)-f(x)| : h=(h_1, h_2);\ |h_i|\leq\delta_i,\ i=1,2,-x,\ x+h\in\Omega\}.$$

Если E и Δ — подмножества Ω и $x\in\Omega$, то $kmn(E, x)$—это компонента множества E, содержащая x, $V_0(E, \Delta)$ — число компонент множества E, принадлежащих Δ, а $\nu(E, \Delta)=\nu(E\cap\Delta]$, где $\nu[E\cap\Delta]$ — длина (1-мера Хаусдорфа) множества $E\cap\Delta$.

Ниво действительной функции f, определенной на Ω:

$$E(f, t)=\{x\in\Omega : f(x)=t\},\ t\in(-\infty, +\infty).$$

Известно [3, 4], что если $f\in C(\Omega)$, то $V_0(E(f, t), \Omega)$ и $\nu(E(f, t), \Omega)$ измеримые функции $(t\in(-\infty, +\infty))$.

Будем говорить (см. А. Г. Витушкин [3], А. С. Кронрод [4]), что функция $f\in C(\Omega)$ имеет ограниченную линейную вариацию $V(f)$, если $V(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}V_0(E(f, t), \Omega)dt<\infty$, и ограниченную плоскую вариацию $W(f)$, если $W(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\nu(E(f, t), \Omega)dt<\infty$. Функция f, заданная на Ω, имеет ограниченную в смысле Тонелли вариацию $V_T(f)$ [5], если $V_T(f)=\int_0^1 V_0^1 f(t, \cdot)dt + \int_0^1 V_0^1 f(\cdot, t)dt<\infty$.

Говорят, что функция f, определенная на Ω, имеет ограниченную в смысле Витали вариацию $V_B(f)$, если

$$V_B(f)=\sup\sum_{i,j}|f_{i+1,j+1}+f_{i,j}-f_{i,j+1}-f_{i+1,j}|<\infty,$$

где sup взят по произвольным разбиениям Σ_n^2 (см. [4]), а $f_{ij}=f(x_1^i,\ x_2^j)$ $i,j=0,1,\ldots, n$ (n — произвольное натуральное число).

Если $V_B(f)<\infty$ и $f(t, 0)$, $f(0, t)$ являются функциями одного переменного $(t\in[0,1])$ с ограниченными вариациями, то f называется функцией с ограниченным в смысле Витали—Харди [6] изменением $V_{BH}(f) : V_{BH}(f) = V_B(f)+V_0^1 f(\cdot, 0)+V_0^1 f(0, \cdot)$.

Будем говорить, что функция f, заданная на Ω, абсолютно непрерывная на Ω, если $f'_{x_1}, f'_{x_2}\in L(\Omega)$, и для любого $t\in[0, 1]$ абсолютно непрерывные функции одного переменного $f(t, \cdot)$ и $f(\cdot, t)$. Заметим, что для абсолютно непрерывной функции f и $(x_1^i,\ x_2^l)\in\Omega$

$$f(x_1, x_2)=\sum_{0\leq m+l\leq k-1}a_{ij}^{ml}x_1^m x_2^l+\frac{1}{(k-1)!}\int_{x_1^l}^{x_1}(x_1-\xi)^{k-1}D^{k,0}f(\xi, x_2)d\xi \tag{8}$$

$$+\sum_{l=0}^{k-1}\frac{(x_1-x_1^i)^l}{l!(k-l-1)!}\int_{x_2^l}^{x_2}(x_2-\xi)^{k-l-1}D^{l,k-l}f(x_1^i, \xi)d\xi,\ (x_1\, x_2)\in\Omega,$$

где, как обычно, $D^{l,k-l}f=\partial^k f/\partial x_1^l\partial x_2^{k-l}$.

Для функции f, определенной на Ω, и прямоугольника $\Delta\subset\Omega$ введем обозначения $M(f;\Delta)=\sup\{f(x):x\in\Delta\}$, $m(f;\Delta)=\inf\{f(x):x\in\Delta\}$. Когда функция f подразумевается, будем писать соответственно $M(\Delta)$ или $m(\Delta)$.

1. Односторонние приближения. В этой части Σ_n^2 — заданная система узлов в Ω (см. (4)).

Лемма 1. *Пусть функция $f\in C(\Omega)$ и $V(f)$, $W(f)<\infty$. Тогда*

$$(9)\qquad \sum_{i,j}[M(\Delta_{ij})-m(\Delta_{ij})]\operatorname{mes}(\Delta_{ij})\leqq 9\Delta_n[W(f)+\Delta_n V(f)]$$

(Δ_{ij} определены в (6), (7)).

Доказательство. Положим $\widetilde{x}_p^I=I.\Delta_p^p$, $J=0,1,\ldots$, $n_p=[1/\Delta_n^p]$ и $\widetilde{x}_p^{n_p+1}=1$, если $n_p\neq 1/\Delta_n^p$, $p=1,2$. Обозначим $\widetilde{\Delta}_{IJ}=[\widetilde{x}_1^J,\widetilde{x}_1^{I+1}]\times[\widetilde{x}_2^J,\widetilde{x}_2^{J+1}]$. Теперь заметим, что

$$(10)\qquad \sum_{i,j}[M(\Delta_{ij})-m(\Delta_{ij})]\operatorname{mes}(\Delta_{ij})\leqq\sum_{I,J}[M(\widetilde{\Delta}_{IJ})-m(\widetilde{\Delta}_{IJ})]\operatorname{mes}(\widetilde{\Delta}_{IJ}).$$

Так как $f\in C(\Omega)$, то для каждого $t\in[m(\widetilde{\Delta}_{IJ}),M(\widetilde{\Delta}_{IJ})]$ существует т. $x(\overset{1}{t})\in E(f,t)\cap\widetilde{\Delta}_{IJ}$. Нетрудно установить, что для прямоугольников $\Delta_{IJ}=(\widetilde{x}_1^I-\Delta_n^1,\ \widetilde{x}_1^{I+1}+\Delta_n^1)\times(\widetilde{x}_2^J-\Delta_n^2,\ \widetilde{x}_2^{J+1}+\Delta_n^2)\cap\Omega$ имеем:

$$(11)\qquad \Delta'_{KL}\cap\Delta'_{IJ}=\varnothing,\ \text{если}\ \min\{|K-I|,|L-J|\}\geqq 2\ \text{и}$$

$$(12)\qquad V_0(E_t,\ \Delta'_{IJ})+\nu(E_t,\ \Delta'_{IJ})/\min(\Delta_n^1,\ \Delta_n^2)\geqq 1,\ t\in[m(\widetilde{\Delta}_{IJ}),M(\widetilde{\Delta}_{IJ})],$$

где $E_t=E(f,t)$ (если не существует компонента множества E_t, принадлежащая Δ'_{IJ}, то $\nu(kmn(E_t,x(t)),\ \Delta'_{IJ})\geqq\min(\Delta_n^1,\Delta_n^2)$). Из (12), интегрируя в пределах от $m(\widetilde{\Delta}_{IJ})$ до $M(\widetilde{\Delta}_{IJ})$, получим

$$(13)\qquad M(\widetilde{\Delta}_{IJ})-m(\widetilde{\Delta}_{IJ})\leqq\int_{m(\widetilde{\Delta}_{IJ})}^{M(\widetilde{\Delta}_{IJ})}V_0(E_t,\Delta'_{IJ})dt+\frac{1}{\min(\Delta_n^1,\ \Delta_n^2)}\int_{m(\widetilde{\Delta}_{IJ})}^{M(\widetilde{\Delta}_{IJ})}\nu(E_t\,\Delta'_{IJ})\,dt.$$

(11) показывает, что прямоугольную сетку $\{\Delta'_{IJ}\}$ можно разбить на девять систем прямоугольников $\{\Delta_{IJ}^{(p)}\}$, $p=1,2,\ldots,9$, для которых:

$$(14)\qquad \bigcup_{I,J}\Delta_{IJ}^{(p)}\subset\Omega,\ \Delta_{KL}^{(p)}\cap\Delta_{IJ}^{(p)}=\varnothing\ (K\neq I,\ L\neq J),\ p=1,2,\ldots,9.$$

Из (14) следует

$$(15)\qquad \sum_{I,J}V_0(E_t,\ \Delta_{IJ}^{(p)})\leqq V_0(E_t,\Omega),\ \sum_{I,J}\nu(E_t,\ \Delta_{IJ}^{(p)})\leqq\nu(E_t,\Omega).$$

Теперь, используя (10), (13) и (15), находим

$$\sum_{i,j}[M(\Delta_{ij})-m(\Delta_{ij})]\operatorname{mes}(\Delta_{ij})\leqq\Delta_n^1\Delta_n^2\sum_{p=1}^{9}\sum_{I,J}[M(\Delta_{IJ}^{(p)})-m(\Delta_{IJ}^{(p)})]$$

$$\leqq\Delta_n^1\Delta_n^2\sum_{p=1}^{9}\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{I,J}V_0(E_t,\ \Delta_{IJ}^{(p)})\,dt+\frac{1}{\min(\Delta_n^1,\Delta_n^2)}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{I,J}\nu(E_t,\ \Delta_{IJ}^{(p)})\,dt\Big]$$

$$\leqq\Delta_n^1\Delta_n^2\sum_{p=1}^{9}\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}V_0(E_t,\Omega)\,dt+\frac{1}{\min(\Delta_n^1,\Delta_n^2)}\int_{-\infty}^{+\infty}\nu(E_t,\Omega)dt\Big]$$

$$=9\Delta_n[W(f)+\min(\Delta_n^1,\ \Delta_n^2)V(f)],$$

что доказывает лемму.

Теорема 1. *Пусть функция f, определенная на Ω, имеет производные $D^{l,k-l}f\in C(\Omega)$, $l=0,1,\ldots,k$, а линейные и плоские вариации этих производных ограниченные. Тогда*

$$\widetilde{E}_{\Sigma^2_n,L}^{k}(f)\leqq 9\Delta_n^{k+1}\sum_{l=0}^{k}[W(D^{l,k-l}f)+\Delta_n V(D^{l,k-l}f)].$$

Доказательство. Определим сплайны s^+ и $s^-\in S(k,\Sigma^2_n)$:

$$S^+(x_1,x_2)\,|\,\Delta_{ij}=\sum_{0\leqq m+l\leqq k-1}Q_{ij}^{ml}x_1^m x_2^l+\sum_{l=0}^{k}\frac{(x_1-x_1^i)^l(x_2-x_2^j)^{k-l}}{l!\,(k-l)!}M_{ij}^l, \tag{16}$$

$$S^-(x_1,x_2)\,|\,\Delta_{ij}=\sum_{0\leqq m+l\leqq k-1}Q_{ij}^{ml}x_1^m x_2^l+\sum_{l=0}^{k}\frac{(x_1-x_1^i)^l(x_2-x_2^j)^{k-l}}{l!\,(k-l)!}m_{ij}^l, \tag{17}$$

где $\Sigma\, Q_{ij}^{ml}x_1^m x_2^l$ — полином $(k-1)$-вой степени в представлении (8) для функции f в т. (x_1^i,x_2^j), Δ_{ij} определены в (6) и (7), а $M_{ij}^l=M(D^{l,k-l}f,\Delta_{ij})$, $m_{ij}^l=m(D^{l,k-l}f,\Delta_{ij})$.

Из представлений (8), (16) и (17) вытекает

$$S^-(x)\leqq f(x)\leqq S^+(x)\ \text{для}\ x\in\Omega\ \text{и}$$

$$\|S^+-S^-\|_{L(\Omega)}=\sum_{i,j}\iint_{\Delta ij}|s^+(x)-s^-(x)|\,dx \tag{18}$$

$$=\sum_{i,j}\sum_{l=0}^{k}\frac{(x_1^{i+1}-x_1^i)^{l+1}(x_2^{j+1}-x_2^j)^{k-l+1}}{(l+1)!\,(k-l+1)!}(M_{ij}^l-m_{ij}^l).$$

Из леммы 1 и (18):

$$\|S^+-S^-\|_{L(\Omega)}\leqq\Delta_n^k\sum_{l=0}^{k}\sum_{i,j}[M_{ij}^l-m_{ij}^l]\operatorname{mes}(\Delta_{ij})$$

$$\leqq 9\,\Delta_n^{k+1}\sum_{l=0}^{k}[W(D^{l,k-l}f)+\Delta_n V(D^{l,k-l}f)].$$

Это доказывает теорему 1.

Связь между линейной и плоской вариацией и интегральным модулем непрерывности функции f дает следующие леммы:

Лемма 2. *Пусть функция $f\in C(\Omega)$ и $V(f), W(f)<\infty$. Тогда для любого $\delta\leqq(n+1)^{-1}$: $\omega(f;\delta,\delta)_L\leqq 72\,n^{-1}[W(f)+n^{-1}V(f)]$.*

Доказательство леммы 2 сводится к лемме 1.

Лемма 3. *Пусть функция $f\in C(\Omega)$. Тогда $W(f)\leqq\liminf\limits_{n\to\infty}n[\omega(f;n^{-1},0)_L+\omega(f;0,n^{-1})_L]$.*

Лемма 2 и лемма 3 ведут к

Следствие 1. Если функция $f\in C(\Omega)$ и $V(f)<\infty$, то $W(f)\leqq\liminf\limits_{n\to\infty}n[\omega(f;n^{-1},0)_L+\omega(f;0,n^{-1})_L]\leqq 72\,W(f)$.

Для односторонних приближений функции f свободными сплайнами из $S(k,n,\varrho)$ в силе следующая

Теорема 2. *Пусть функция f, определенная на Ω, имеет абсолютно непрерывные производные $D^{l,k-l-1}f$, $l=0,1,\ldots,k-1$, а производные $D^{l,k-l}f$, $l=0,1,\ldots,k$ имеют ограниченные в смисле Витали—Харди вариации. Тогда*

$$\widetilde{E}^k_{n^2,L_p,\varrho}(f)=O[n^{-(k+1)}\sum_{l=0}^{k}V_{BH}(D^{l,k-l}f)].$$

О доказательстве см. 2 (замечание 2).

2. Вариации и сплайн-приближения многомерных функций. Следующая лемма позволяет из оценок для наилучших приближений производных $D^{l,k-l}f$, $l=0,1,\dots,k$ ступенчатыми (сплайнами 0-ого порядка) получать оценки для наилучших приближений функции f сплайнами k-ого порядка.

Лемма 4. *Пусть функция f, определенная на Ω, имеет абсолютно непрерывные производные $D^{l,r-l-1}f$, $l=0,1,\dots,r-1 (r\leqq k)$. Тогда*

$$E^k_{\Sigma n^2,L}(f)=O[\Delta^r_n\sum_{l=0}^{r}E^{k-r}_{\Sigma n^2,L}(D^{l,r-l}f)], \tag{19}$$

$$E^k_{n^2,L_p,\varrho}(f)=O[n^{-r}\sum_{l=0}^{r}E^k_{n^2,L_p,\varrho}(D^{l,r-l}f)],\ 1\leqq p\leqq\infty, \tag{20}$$

$$E^k_{n^2,L_p,i}(f)=O[n^{-r}\sum_{l=0}^{r}E^{k-r}_{n^2,L_p,i}(D^{l,r-l}f)],\ i=1,2. \tag{21}$$

Докажем, например (20), в случае $r=1$ (остальные предложения доказываются подобным образом): Пусть $\eta_i=E^{k-1}_{n^2,L_p,\varrho}(f)$ и $S_i(x)$ сплайн-функции класса $S(k-1,n,\varrho)$, для которых $\|f'_{x_i}-S_i\|_{L_p}=\eta_i$, $i=1,2$. Тогда можно так подобрать узлы

$(x_1^i, x_2^j): i=0,1,\dots,n_1;\ j=0,1,\dots,n_2;\ 0=x_1^0<\dots<x_1^{n_1}=1,\ 0=x_2^0<\dots<x_2^{n_2}=1\}$,

чтобы выполнялись:

$$x_1^{i+1}-x_1^i\leqq n^{-1},\ x_2^{j+1}-x_2^j\leqq n^{-1},\ i=0,1,\dots,n_1-1,\ j=0,1,\dots,n_2-1, \tag{22}$$

$$\text{узлы сплайнов } S_1 \text{ и } S_2 \text{ принадлежат } \{(x_1^i, x_2^j)\}, \tag{23}$$

$$\int_0^1\int_{x_2^j}^{x_2^{j+1}}|f'_{x_1}(t,u)-S_1(t,u)|^p\,du\,dt\leqq\eta_1^p n^{-1},\ j=0,1,\dots,n_2-1, \tag{24}$$

для $p=\infty$ неравенство в (24) заменяется на

$$|f'_{x_1}(t,u)-S_1(t,u)|\leqq\eta_1,\ (t,u)\in\Omega. \tag{24'}$$

При этом можно предполагать, что $n_1\leqq 3n$, $n_2\leqq 4n$. Для некоторого $\widetilde{x}_2^j\in(x_2^j, x_2^{j+1})$ из (24) вытекает

$$(x_2^{j+1}-x_2^j)\int_0^1|f'_{x_1}(t,\widetilde{x}_2^j)-S_1(t,\widetilde{x}_2^j)|^p dt\leqq\eta_1^p n^{-1},\ 1\leqq p<\infty, \tag{25}$$

для $p=\infty$, (25) заменяем опять на (24').

В т. $(x_1^i, \widetilde{x}_2^j)$ имеем представление (8) для $(x_1, x_2)\in\Delta_{ij}$:

$$f(x_1,x_2)=f(x_1^i,\widetilde{x}_2^j)+\int_{x_1^i}^{x_1}f'_{x_1}(t,\widetilde{x}_2^j)\,dt+\int_{\widetilde{x}_2^j}^{x_2}f'_{x_2}(x_1,t)\,dt.$$

Построим сплайн-функцию $S\in S(k,4n,\varrho)$:

$$S(x_1, x_2)|_{\Delta_{ij}} = f(x_1^i, \widetilde{x}_2^j) + \int\limits_{x_1^i}^{x_1} S_1(t, \widetilde{x}_2^j)\,dt + \int\limits_{\widetilde{x}_2^j}^{x_2} S_2(x_1, t)\,dt$$

(Δ_{ij} определены в (6) и (7)). Несложные вычисления дают

$$(26)\qquad \|f-S\|_{L_p(\Omega)} \leqq 2n^{-1}(5^{p-1}_{\eta_1} + \eta_2),$$

откуда следует (20) в случае $r=1$.

Лемма 5. *Если функция f, заданная на Ω, имеет ограниченную в смысле Витали—Харди вариацию $V_{BH}(f)$, то $E^0_{n^2, L_p, \varrho}(f) \leqq 4V_{BH}(f)/(n-1)$, $n=2,3,\ldots$*

Доказательство. Пусть узлы $\{(x_1^i, x_2^j): i=0,1,\ldots,n_1; j=0,1,\ldots, n_2;\ 0=x_p^0 < \cdots < x_p^{n_p}=1,\ p=1,2\}$ подобраны так, что для каждого замкнутого прямоугольника Δ'_{ij}, $\Delta'_{ij} \subset \Delta^0_{ij} = (x_1^i, x_1^{i+1}) \times (x_2^j, x_2^{j+1})$ имеем

$$(27)\qquad V_B(f\,|\,\Delta'_{ij}) \leqq n^{-1} V_B(f)$$

$$(28)\qquad V_{x_1^i}^{x_1^{i+1}} f(\cdot, 0) \leqq n^{-1} V_0^1 f(\cdot, 0),\ V_{x_2^j}^{x_2^{j+1}} f(0, \cdot) \leqq n^{-1} V_0^1 f(0, \cdot).$$

Заметим, что (27) и (28) можно гарантировать с не более чем $(2n+1)$ узлов ($n_1, n_2 \leqq 2n$). Пусть теперь т. $(Q_1^i, Q_2^j) \in \Delta^0_{ij}$, $i=0,1,\ldots,n_1$, $j=0,1,\ldots, n_2$. Построим функцию $s \in S(0, 2n, \varrho): S(x)|_{\Delta_{ij}} = f(Q_1^i, Q_2^j)$, где Δ_{ij} определены в (6) и (7). Для любой точки $(x_1, x_2) \in \Delta^0_{ij}$ из (27) и (28):

$$|f(x_1, x_2) - S(x_1, x_2)| = |f(x_1, x_2) - f(Q_1^i, Q_2^j)| \leqq |f(x_1, x_2) - f(x_1, Q_2^j)$$
$$+ f(0, Q_2^j) - f(0, x_2)| + |f(0, Q_2^j) - f(0, x_2)| + |f(x_1, Q_2^j) - f(Q_1^i, Q_2^j)$$
$$+ f(Q_1^i, 0) - f(x_1, 0)| + |f(Q_1^i, 0) - f(x_1, 0)| \leqq n^{-1}[V_B(f) + V_0^1 f(0, \cdot)$$
$$+ V_B(f) + V_\theta^1 f(\cdot, 0)] \leqq 2V_{BH}(f) n^{-1}.$$

Это доказывает лемму.

Из леммы 4 и леммы 5 вытекает:

Теорема 3. *Пусть функция f, определенная на Ω, имеет абсолютно непрерывные производные $D^{l,k-l-1}f$, $l=0,1,\ldots,k-1$ на Ω, а производные $D^{l,k-l}f$, $l=0,1,\ldots,k$ имеют ограниченные в смысле Витали—Харди вариации. Тогда*

$$(29)\qquad E^k_{n^2, L_p, \varrho}(f) = O[n^{-(k+1)} \sum_{l=0}^{k} V_{BH}(D^{l,k-l}f)],\ 1 \leqq p \leqq \infty.$$

Замечание 1. Для справедливости (29), в теореме 3 достаточно потребовать, чтобы производные $D^{l,k-l-1}f(\cdot, t)$ и $D^{l,k-l-1}f(t, \cdot)$ были абсолютно непрерывные функции одного переменного для почти каждого $t \in [0, 1]$.

Замечание 2. Если построим сплайны s^+, $s^- \in S(0, 2n, \varrho)$, полагая в доказательстве леммы 5: $S^+|_{\Delta_{ij}} = \sup\{f(x): x \in \Omega\}$, $S^-|_{\Delta_{ij}} = \inf\{f(x) : x \in \Delta\}$, то, используя рассуждения, подобные доказательству леммы 4 нетрудно установить теорему 2 об односторонних приближениях.

Лемма 6. *Если функция f, заданная на Ω, имеет ограниченную в смысле Тонелли вариацию, то $E^0_{\Sigma^2_{n,L}}(f) \leqq \Delta_n V_T(f)$.*

Доказательство. Пусть $Q_2^j \in (x_2^j, x_2^{j+1})$ такие, что

$$(30)\qquad (x_2^{j+1}-x_2^j)V_0^1 f(\cdot, Q_2^j) \leqq \int\limits_{x_2^j}^{x_2^{j+1}} V_0^1 f(\cdot, t)dt,\ j=0, 1, \ldots, n-1.$$

Построим функцию $s \in S(0, \Sigma_n^2): s|_{\Delta_{ij}} = f(x_1^i, Q_2^j)$. Используя (30), последовательно имеем:

$$\|f-S\|_{L(\Omega)} = \sum_{i,j} \iint\limits_{\Delta_{ij}} |f(x_1, x_2) - S(x_1, x_2)|\, dx_1\, dx_2$$

$$\leqq \sum_{i,j} \iint\limits_{\Delta_{ij}} [V_{x_2^j}^{x_2^{j+1}} f(x_1, \cdot) + V_{x_1^i}^{x_1^{i+1}} f(\cdot, Q_2^j)] dx_1\, dx_2$$

$$\leqq \Sigma (x_2^{j+1}-x_2^j) \int\limits_0^1 V_{x_2^j}^{x_2^{j+1}} f(x_1, \cdot)\, dx_1 + \sum_{i,j} (x_1^{i+1}-x_1^i)(x_2^{j+1}-x_2^j)\, V_{x_1^i}^{x_1^{i+1}} f(\cdot, Q_2^j)$$

$$\leqq \Delta_n^2 \sum_j \int\limits_0^1 V_{x_2^j}^{x_2^{j+1}} f(x_1, \cdot) dx_1 + \Delta_n^1 \sum_j (x_2^{j+1}-x_2^j) V_0^1 f(\cdot, Q_2^j)$$

$$\leqq \Delta_n^2 \int\limits_0^1 V_0^1 f(x_1, \cdot) dx_1 + \Delta_n^1 \int\limits_0^1 V_0^1 f(\cdot, x_2) dx_2 \leqq \Delta_n V_T(f),$$

что завершает доказательства.

Из леммы 4, (19) и леммы 6 получаем

Теорема 4. *Пусть функция f, определенная на Ω, имеет абсолютно непрерывные производные $D^{l,k-l-1} f$, $l=0, 1, \ldots, k-1$ на Ω, а вариации Тонелли производных $D^{l,k-l} f$, $l=0, 1, \ldots, k$ ограниченные. Тогда* $E^k_{\Sigma_n^2, L}(f) = O[\Delta_n^{k+1} \sum_{l=0}^{k} V_T(D^{l,k-l} f)]$.

Замечание 3. См. замечание 1.

Для приложения полезна

Теорема 5. *Если выполнены условия теоремы 4, то*

$$E^k_{n^2, L_p}(f) \leqq E^k_{n^2, L_p, 1}(f) = O\{n^{-(k+1)} \sum_{l=0}^{k} V_T(D^{l,k-l} f) + n^{-k}[\omega(D^{k,0} f; n^{-1}, 0) + \omega(D^{0,k} f; 0, n^{-1})]\}.$$

Доказательство. Пусть узлы

$$\{x_1^i, x_2^{ij}): i=0, 1, \ldots, m-1; j=0, 1, \ldots, n_i; 0=x_1^0 < \cdots < x_1^m = 1, 0 = x_2^{i,0} < \cdots < x_2^{i,n} = 1\},$$

$m \leqq 2n$, $n_i \leqq 2n$ подобраны так, что

$$(31)\qquad x_1^{i+1} - x_1^i \leqq n^{-1},\ x_2^{i,j+1} - x_2^{i,j} \leqq n^{-1}$$

$$(32)\qquad p_{ij} \equiv \sum_{l=0}^{k} \int\limits_{x_1^i}^{x_1^{i+1}} V_{x_2^{i,j}}^{x_2^{i\ j+1}} [D^{l,k-l} f(x_1, \cdot)] dx_1 \leqq n^{-2} \sum_{l=0}^{k} V_T(D^{l,k-l} f),$$

и для $\tilde{x}_1^i \in (x_1^i, x_1^{i+1})$:

$$(33)\qquad (x_1^{i+1} - x_1^i) \sum_{l=0}^{k} V x_{2}^{i,j+1}{}_{i,j} [D^{l,k-l} f(\tilde{x}_1^i, \cdot)] \leqq p_{ij}.$$

Построим функцию $s \in S_1(k, 2n) \subset S(k, 4n^2)$:

$$s(x_1, x_2)|_{\Delta_{ij}} = \sum_{0 \leqq m+l \leqq k-1} Q_{ij}^{ml} x_1^m x_2^l + \frac{1}{(k-1)!(x_1^{i+1} - x_1^i)} \int_{x_1^i}^{x_1} \int_{x_1^i}^{x_1^{i+1}} (x_1 - \xi)^{k-1}$$

$$D^{k,0} f(u, x_2^{ij}) du\, d\xi + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{(x_1 - x_1^i)^l}{l!(k-l-1)!(x_2^{i,j+1} - x_2^{i,j})} \int_{x_2^{ij}}^{x_2} \int_{x_2^{ij}}^{x_2^{i,j+1}} (x_2 - \xi)^{k-l-1}$$

$$D^{l,k-l} f(\widetilde{x}_1^i, u) du\, d\xi,$$

где $\Delta_{ij} = [x_1^i, (x_1^{i+1}) \times [x_2^{ij}, x_2^{i,j+1})$, а для $i = m-1$ или $j = n_i - 1$ Δ_{ij} дополнены, как в (7). Из (34) и представления (8) для функции $\widetilde{f}$ в т. (x_1^i, x_2^{ij}):

$$|f(x) - s(x)||_{\Delta_{ij}} \leqq \Big\{ \frac{1}{(k-1)!(x_1^{i+1} - x_1^i)} \int_{x_1^i}^{x_1} \int_{x_1^i}^{x_1^{i+1}} (x_1 - \xi)^{k-1} [\,| D^{k,0} f(\xi, x_2)$$

$$- D^{k,0} f(\xi, x_2^{ij})| + |D^{k,0} f(\xi, x_2^{ij}) - D^{k,0} f(u, x_2^{ij})|\,] du\, d\xi$$

$$+ \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(x_1 - x_1^i)^l}{l!(k-l-1)!(x_2^{i,j+1} - x_2^{i,j})} \int_{x_2^{ij}}^{x_2} \int_{x_2^{ij}}^{x_2^{i,j+1}} (x_2 - \xi)^{k-l-1} \times |D^{l,k-l} f(\widetilde{x}_1^i,$$

$$\xi) - D^{l,k-l} f(\widetilde{x}_1^i, u)|\, du\, d\xi \leqq c_1 \Big\{ n^{-(k-1)} \int_{x_1^i}^{x_1^{i+1}} V_{x_2^{ij}}^{x_2^{i,j+1}} [D^{k,0} f(\xi, \cdot)] d\xi$$

$$+ n^{-k} \omega(D^{k,0} f;\, n^{-1}, 0) + n^{-(k-1)} \sum_{l=1}^{k-1} (x_1^{i+1} - x_1^i) V_{x_2^{ij}}^{x_2^{i,j+1}} [D^{l,k-l} f(\widetilde{x}_1^i, \cdot)]$$

$$+ n^{-k} \omega(D^{0,k} f;\, 0, n^{-1}) \Big\}.$$

(c_1—абс. константа). Последнее неравенство и (31)—(33) доказывают теорему.

Следующее предложение является двумерным аналогом одного помощного утверждения В. А. Попова и Г. Фройда [1].

Лемма 7. *Для каждой функции $f \in L(\Omega)$, $h > 0$ и $k = 0, 1, \ldots$ существует функция $f_{k+1,h}$, определенная на Ω, и такая, что*

$$\|f_{k+1,h} - f\|_{L_p(\Omega)} \leqq c_p \omega_{k+1}(f; h_1, h)_{L_p} (1 \leqq p \leqq \infty), \ c_p \text{ — абс. конст.}$$

$$\| D^{l_1, l_2} f_{k+1,h} \|_{L_p(\Omega)} \leqq 2^{l_1 + l_2} h^{-l_1 - l_2} \omega_{k+1}(f;\, h, h)_{L_p},\ l_1 + l_2 = 0, 1, \ldots, k+1,$$

$$V_T(D^{l,k-l} f_{k+1,l_1}) = O\{h^{-k} \omega_{k+1}(f;\, h, h) + h^{-1} [\omega(D^{l,k-l} f;\, 0, h)_L + \omega(D^{l,k-l} f;\, h, d_L]\}.$$

Приведем одно из следствий теоремы 5 и леммы 7:

Следствие 2. Если функция f имеет абсолютно непрерывные производные $D^{l,k-l-1} f$, $l = 0, 1, \ldots, k-1$ на Ω, то $(np_n \to 0)$

$$E_{n^2, L_p}^k (f) = O\{\omega_{k+1}(f, p_n, p_n)_{L_p} + p_n^k + n^{-k} [\omega(D^{k,0} f;\, n^{-1}, 0) + \omega(D^{0,k} f;\, 0, n^{-1})]\}.$$

Из следствия 2 получаем, например,

Следствие 3. Если для функции f, определенной на Ω,

$$\omega(D^{l,k-l-1} f;\, \delta, \delta) = O(\delta),\ e = 0, 1, \ldots, k-1 \tag{35}$$

и $D^{k,0} f, D^{0,k} f \in C(\Omega)$, то

$$E^k_{n^2,C}(f)=0(n^{-k}). \tag{36}$$

Замечание 4. В одномерном случае ($k=1$ — результат Н. П. Корнейчука) из $f^{(k-1)}\in \mathrm{Lip}\,1$ следует, что $E^k_{n,c}(f)=o(n^{-k})$ (см., например [1], [2]). Нам кажется, что в многомерном случае для выполнения (36), кроме условия (35), по существу необходимы некоторые дополнительные условия для производных $D^{l,k-l}f$.

Замечание 5. Все приведенные утверждения можно сформулировать и для приближений m-мерных функций, определенных на m-мерном кубе $[0,1]^m$.

Выражаю свою признательность В. А. Попову для постановки задач и внимания к этой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Фройд, В. А. Попов. Некоторые вопросы, связанные с аппроксимацией сплайн-функциями и многочленами. *Stud. Sci. Math. Hung.*, **5**, 1970, 161—171.
2. В. А. Попов. Об аппроксимации абсолютно непрерывных функций сплайн-функциями. *Доклады БАН*, **28**, 1975, № 10, 1299—1301.
3. А. Г. Витушкин. О многомерных вариациях. Москва,1955.
4. А. С. Кронрод. О функциях двух переменных. *Успехи мат. наук*, **5**, 1950, № 1, 24—134.
5. Дж. Сакс. Теория интеграла. Москва, 1955.
6. Л. В. Жижиашвили. Сопряженные функции и тригонометрические ряды. Тбилиси, 1969.