КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'77
София . 1980, с. 161—169

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'77
Sofia . 1980, p. 161—169

О ПРИБЛИЖЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ СУММАМИ ФЕЙЕРА

И. Х. Фесчиев

Резюме. В работе изучается приближение периодических функций двух переменных суммами Фейера. Особое внимание уделено аппроксимации сопряженных функций. На основе соответствующих результатов С.Б. Стечкина в одномерном случае устанавливаются оценки уклонения функции $f\,(\widetilde{f}) \in C$ от ее сумм Фейера, зависящие от поведения последовательности наилучших приближений $\{E_{\nu,\mu}(f)\}$ (от частных модулей непрерывности функции f и $E_{n,m}(\widetilde{f})$).

Доказательства основных теорем имеют весьма общий характер и они проходят для любого пространства $L_p\,(p \geq 1)$.

Задача о приближении периодических функций одного переменного суммами Фейера была объектом изучения многих математиков. В первую очередь, можно указать на результаты С. Н. Бернштейна [1], С. М. Никольского [2], Г. Алексича [3], М. Заманского [4], А. В. Ефимова [5, 6], С. Б. Стечкина [7], Г. К. Лебедя, А. А. Авдеенко [8]. В частности, особое внимание уделено аппроксимации сопряженных функций (см. [3—8]). Следует заметить, что во всех цитированных работах, кроме [7], исследования проводятся, как правило, выделением главного члена уклонений рассматриваемых функций от их сумм Фейера. В работе [7] обосновывается совершенно другой подход к решению указанной задачи. При помощи основных свойств сумм Валле—Пуссена выводятся новые оценки для уклонений $\varrho_n(f)$ $(\varrho_n(\widetilde{f}))$ функции $f\,(\widetilde{f}) \in C$ от ее сумм Фейера, зависящие от поведения последовательности наилучших приближений $\{E_\nu(f)\}$ $(E_{n+1}(\widetilde{f})$ и $\omega(f;\, 1/n))$.

В то же время по отношению к многомерному случаю еще сделано недостаточно. Насколько мне известно, имеется лишь несколько работ, посвященные аппроксимации функций многих переменных суммами Фейера. В работе О. Д. Габисония [9], на основе ряда результатов из [7], изучается приближение функций многих переменных некоторыми линейными методами, откуда, в частности, выводится оценка для сумм Фейера, зависящая от последовательностей частных наилучших приближений аппроксимируемых функций. В [10] установлено, что $\sup\{\sup\{\|\sigma_{n,n}(f;\, x,\, y) - f(x,\, y)\| / \ln(n+1) \,.\, \omega(f;\, 2\pi/(n+1),\, 2\pi/(n+1)) : f \in C_{2\pi,\,2\pi},\, f \neq \text{const}\}:$

$n=1, 2, \ldots\}=1/\ln 2$. В работе [11] А. И. Буадзе попробовал перенести необходимость теоремы Алексича—Заманского [3,4] на сопряженных функциях двух переменных. Однако следует учесть, что в этой работе содержатся ошибочные утверждения (см. теорему B).

Целью настоящей статьи является изучение аппроксимации функций двух переменных (и их сопряженных) суммами Фейера с той точки зрения и в таком плане, как это сделано С. Б. Стечкиным [7] в одномерном случае. Отметим, что здесь пришлось преодолевать ряд технических и принципиальных трудностей. На эту задачу мне обратил внимание сам Сергей Борисович во время моего доклада на конференции в г. Благоевград и тем самым способствовал обобщению и улучшению моих первоначальных результатов. Пользуясь случаем, выражаю С. Б. Стечкину глубокую благодарность.

1. Оценка для $\varrho_{n,m}(f)$. Пусть $f(x, y)$ — непрерывная функция с периодом 2π по каждой из переменных. Через $E_{n,m}(f)$ будем обозначать наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами порядка $n-1$ по переменной x и порядка $m-1$ по переменной y, а через $\omega_k(f;\delta, 0)$ и $\omega_k(f; 0, \delta)$ — частные модули непрерывности k-ого порядка соответственно по x и по y.

Пусть $s_{\nu,\mu}(f)$ — частичная сумма ряда Фурье функции f. Тогда двойные суммы Фейера и Валле — Пуссена определяются равенствами

$$\sum_{\nu=0}^{k-1}\sum_{\mu=0}^{j-1} s_{\nu,\mu}(f)=k\,.\,j\,.\,\sigma_{k,j}(f) \tag{1.1}$$

$$\tau_{n,m\,;\,p,q}(f;\ x,\ y)=(p+1)^{-1}(q+1)^{-1}\sum_{\nu=n-p}^{n}\ \sum_{\mu=m-q}^{m} s_{\nu,\mu}(f).$$

Укажем на некоторые основные свойства этих сумм.

Пусть $K_n(t)$ — ядро Фейера. Исходя из равенства $\sigma_{n,m}(f)=\pi^{-2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t,\ y+\tau)\,K_n(t)\,.\,K_m(\tau)\,dt\,d\tau$ и принимая во внимание, что $K_n(t)\geqq 0$; $\pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)\,dt=1$ [12, с. 148], имеем, очевидно,

$$|\sigma_{n,m}(f)|\leqq\|f\|;\ n,\ m=0,\ 1,\ 2,\ldots \tag{1.2}$$

Далее, легко убедиться в справедливости тождества

$$\sum_{\nu=n-p}^{n}\ \sum_{\mu=m-q}^{m} s_{\nu,\mu}(f)=(n+1)\,(m+1)\,\sigma_{n+1,\,m+1} \tag{1.3}$$

$$+(n-p)(m-q)\,\sigma_{n-p,\,m-q}-(n-p)(m+1)\,\sigma_{n-p,\,m+1}-(n+1)(m-q)\,\sigma_{n+1,\,m-q}.$$

Из (1.1), (1.2) и (1.3) вытекает

$$|\tau_{n,m\,;\,p,q}(f;\,x,\,y)|\leqq(p+1)^{-1}(q+1)^{-1}(2n-p+1)\,(2m-q+1)\,.\,\|f\|. \tag{1.4}$$

Отметим, что неравенство (1.4) можно также вывести без труда путем введения частных сумм Валле — Пуссена по каждой из переменных (при фиксированной другой) на основании соответствующего свойства в одномерном случае (см., например, [13]).

Пусть теперь $T^*_{n-p,\ m-q}(x, y)$ — тригонометрический полином наилучшего приближения функции f в метрике пространства C порядка $n-p$ по x и порядка $m-q$ по y. Поскольку, в силу (1.4)

$$\tau_{n,m\,;\,p,q}[f-T^*_{n-p,\,m-q}]|\leqq(p+1)^{-1}(q+1)^{-1}(2n-p+1)(2m-q+1)$$
$$\times E_{n-p+1,\,m-q+1}(f),$$

то

$$|f-\tau_{n,m\,;\,p,q}(f)|\leqq[1+(p+1)^{-1}(q+1)^{-1}(2n-p+1)(2m-q+1)].E_{n-p+1,m-q+1}(f). \tag{1.5}$$

Теорема 1. *Пусть $f(x, y)\in C$. Тогда*

$$\varrho_{n,m}(f)=\|f-\sigma_{n-1,\,m-1}(f)\|\leqq\frac{136}{n\,m}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m}E_{\nu,\mu}(f),\ n,\ m=1,\ 2,\dots$$

Доказательство. Зафиксируем натуральные числа n и m и определим целые $r\geqq 0$ и $\varrho\geqq 0$ из условий $2^r\leqq n<2^{r+1}$; $2^\varrho\leqq m<2^{\varrho+1}$. При помощи формулы $f-\tau_{n,m\,;\,p,q}(f)=(p+1)^{-1}(q+1)^{-1}\sum\limits_{\nu=n-p}^{n}\sum\limits_{\mu=m-q}^{m}[f-s_{\nu,\mu}(f)]$ и исходя из тех же соображений, что и в работе [7], будем иметь

$$\begin{aligned}
f-\sigma_{n-1,m-1}(f)=\frac{1}{n.m}\Big\{&(f-\tau_{0,0\,;\,0,0})+\sum_{\alpha=1}^{r-1}2^{\alpha-1}[f-\tau_{2^\alpha-1,0\,;\,2^{\alpha-1}-1,0}]+(n-2^{r-1})\\
&\times[f-\tau_{n-1,\,0;\,n-2^{r-1}-1,\,0}]+\sum_{\beta=1}^{\varrho-1}2^{\beta-1}[f-\tau_{0,\,2^\beta-1\,;\,0,\,2^{\beta-1}-1}]\\
&+(m-2^{\varrho-1})[f-\tau_{0,\,m-1\,;\,0,\,m-2^{\varrho-1}-1}]+\sum_{\alpha=1}^{r-1}\sum_{\beta=1}^{\varrho-1}2^{\alpha-1}2^{\beta-1}\\
&\times[f-\tau_{2^\alpha-1,\,2^\beta-1\,;\,2^{\alpha-1}-1,\,2^{\beta-1}-1}]+(n-2^{r-1})\,(m-2^{\varrho-1})\\
&\times[f-\tau_{n-1,m-1;n-2^{r-1}-1,\,m-2^{\varrho-1}-1}]\Big\}.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Теперь воспользуемся оценкой (1.5). Имеем

$$|f-\tau_{2^\alpha-1,\,0\,;\,2^{\alpha-1}-1,0}(f)|\leqq 4\,E_{2^{\alpha-1},\,1}(f) \tag{1.7}$$

$$|f-\tau_{n-1,\,0\,;\,n-2^{r-1}-1,\,0}(f)|\leqq(2n\,/\,(n-2^{r-1}))\,E_{2^{r-1}+1,\,1}(f) \tag{1.8}$$

$$|f-\tau_{2^\alpha-1,\,2^\beta-1;\,2^{\alpha-1}-1,\,2^{\beta-1}-1}(f)|\leqq 10\,E_{2^{\alpha-1}+1,\,2^{\beta-1}+1}(f) \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}|f-\tau_{n-1,\,m-1\,;\,n-2^{r-1}-1,m-2^{\varrho-1}-1}(f)|&\leqq 2[n.m+2^{r-1}2^{\varrho-1}]\\
&\times(n-2^{r-1})^{-1}(m-2^{\varrho-1})^{-1}E_{2^{r-1}+1,\,2^{\varrho-1}+1}(f).\end{aligned} \tag{1.10}$$

Остальные выражения в (1.6) оцениваются аналогично (1.7) и (1.8). Кроме того, легко показать, что

$$2^{\alpha+\beta}\,.\,E_{2^\alpha-1,2^\beta-1}(f)\leqq 16\sum_{\nu=2^{\alpha-2}+1}^{2^{\alpha-1}}\ \sum_{\mu=2^{\beta-2}+1}^{2^{\beta-1}}E_{\nu,\mu}(f);$$

$$E_{n,m}(f) \leqq (n-s)^{-1}(m-\sigma)^{-1} \sum_{\nu=s+1}^{n} \sum_{\mu=\sigma+1}^{m} E_{\nu,\mu}(f).$$

Применяя последние две неравенства к (1.7) — (1.10), из (1.6) после некоторых элементарных преобразований и оценок выводим

$$\varrho_{n,m}(f) \leqq \frac{2}{n.m} \{10\, E_{1,1}(f) + 14 \sum_{\alpha=2}^{r-1} \sum_{\nu=2^{\alpha-2}+1}^{2^{\alpha-1}} E_{\nu,1}(f) + 14 \sum_{\beta=2}^{\varrho-1} \sum_{\mu=2^{\beta-2}+1}^{2^{\beta-1}} E_{1,\mu}(f)$$

$$+ 8 [\sum_{\nu=2^{r-2}+1}^{n} E_{\nu,1}(f) + \sum_{\mu=2^{\varrho-2}+1}^{m} E_{1,\mu}(f)]$$

$$+ 20 \sum_{\alpha=2}^{r-1} \sum_{\beta=2}^{\varrho-1} \sum_{\nu=2^{\alpha-2}+1}^{2^{\alpha-1}} \sum_{\mu=2^{\beta-2}+1}^{2^{\beta-1}} E_{\nu,\mu}(f) + 68 \sum_{\nu=2^{r-2}+1}^{n} \sum_{\mu=2^{\varrho-2}+1}^{m} E_{\nu,\mu}(f)\}$$

$$\leqq 136\,(n\,m)^{-1} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} E_{\nu,\mu}(f),$$

что и требовалось доказать.

Следует отметить, что эта теорема остается справедливой и в пространствах $L_p\,(1 \leqq p < \infty)$.

2. Оценка для $\varrho_{n,m}(\widetilde{f})$. Займемся теперь более интересной и в то же время более трудной задачей об аппроксимации сопряженных функций двух переменных. Пусть $f(x, y) \in C$. Через $\widetilde{f}(x, y)$ будем обозначать функцию, тригонометрически сопряженную (по обеим переменным) с $f(x, y)$. Предполагая, что наряду с $f \in C$ и $\widetilde{f} \in C$, мы выведем здесь общую оценку для уклонений $\varrho_{n,m}(\widetilde{f})$. Доказательство основывается на свойстве (1.5) двойных сумм Валле — Пуссена и на последующих двух ламмах.

Лемма 1. *Пусть $f(x,y)$ дифференцируема по x и по y, причем $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial y \in C$. Тогда*

$$\varrho_{n,m}(\widetilde{f}) < 3\pi^2 (\|\frac{\partial f}{\partial x}\| . \|\frac{\partial f}{\partial y}\|\, n^{-1} m^{-1})^{1/3}\, [\|\frac{\partial f}{\partial x}\|^{1/3} n^{-1/3} + \|\frac{\partial f}{\partial y}\|^{1/3} m^{-1/3}]$$

(2.1)

$$+ 6\pi^2 [\|\frac{\partial f}{\partial x}\| n^{-1} \ln m + \|\frac{\partial f}{\partial y}\|\, m^{-1} \ln n],\ n, m = 2,\ 3,\ 4, \ldots .$$

Доказательство. Пусть $\widetilde{K}_n(t)$ — есть сопряженное ядро Фейера [12, с. 153], т. е. $\widetilde{K}_{n-1}(t) = 2^{-1}\operatorname{ctg}(t/2) - n^{-1}.(2\sin(t/2))^{-2} \sin nt$. Поскольку сопряженная функция $\widetilde{f}$ представима сингулярным интегралом с ядром Гильберта

$$\widetilde{f} = (2\pi)^{-2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t,\ y+\tau) \operatorname{ctg}(t/2)\ \operatorname{ctg}(\tau/2)\, dt\, d\tau,$$

то, опираясь на формулу

$$\sigma_{n-1,\,m-1}(\widetilde{f}) = \pi^{-2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t,\ y+\tau)\, \widetilde{K}_{n-1}(t)\, \widetilde{K}_{m-1}(\tau)\, dt\, d\tau,$$

легко показать, что

$$\sigma_{n-1,\, m-1}(\widetilde{f})-\widetilde{f}=(1/2\pi^2)\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\pi}\Delta f(x,\, y;t,\tau)\;[\lambda_n(t)-\operatorname{ctg}(t/2)]\;\lambda_m(\tau)\,dt\,d\tau$$

(2.2)

$$+(1/2\pi^2)\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\pi}\Delta f(x,\ y;\ t,\ \tau)\ \lambda_n(t)\ [\lambda_m(\tau)-\operatorname{ctg}(\tau/2)]dt\,d\tau\equiv \mathrm{I}+\mathrm{I}^*,$$

где $\lambda_p(\theta)=p^{-1}\sin p\theta\,(2\sin(\theta/2))^{-2}$ $(p=1,\,2,\,3,\dots)$; $\Delta f(x,\ y;\ t,\ \tau)=f(x+t,\ y+\tau)-f(x-t,\ y+\tau)-f(x+t,\ y-\tau)+f(x-t,\ y-\tau)$. В силу симметричности подынтегральных выражений в (2.2) относительно t и τ, вполне достаточно ограничиться оценкой лишь одного из двух интегралов, например I.

Нам понадобиться следующее неравенство:

(2.3) $$|\Delta f(x,\ y;\ t,\ \tau)|\leqq 4\,\|\partial f/\partial x\|^s\,\|\partial f/\partial y\|^{1-s}\,t^s\,\tau^{1-s};\ 0\leqq s\leqq 1,$$

справедливость которого вытекает из следующих свойств $|\Delta f|$:

$$|\Delta f(x,\ y;\ t,\ \tau)|\leqq 4\,t\,\|\partial f/\partial x\|;\quad |\Delta f(x,\ y;\ t,\ \tau)|\leqq 4\,\tau\,\|\partial f/\partial y\|$$

$$|\Delta f|^s\leqq 4^s\,t^s\,\|\partial f/\partial x\|^s;\quad |\Delta f|^{1-s}\leqq 4^{1-s}\tau^{1-s}\,\|\partial f/\partial y\|^{1-s}\quad (0\leqq s\leqq 1).$$

Теперь займемся оценкой интеграла I. Имеем

(2.4) $$I=\int\limits_0^{1/n}[\int\limits_0^{1/m}+\int\limits_{1/m}^{\pi}]+\int\limits_{1/n}^{\pi}\int\limits_0^{1/m}+\int\limits_{1/n}^{\pi}\int\limits_{1/m}^{\pi}\equiv I_1+I_2+I_3.$$

Легко выводятся оценки

(2.5) $$\int\limits_0^{1/n}t^s.|(\sin nt-2n.\sin t)/(4n.\sin^2(t/2))|\,dt\leqq 3\pi^2/4.\,s\,n^s;\ \ 0<s\leqq 1,$$

(2.6) $$\int\limits_0^{1/m}\tau^{1-s}.\,|\,\lambda_m(\tau)\,|\,d\tau\leqq\pi^2/4\,(1-s)\,m^{1-s};\ 0\leqq s<1,$$

(2.7) $$\int\limits_{1/m}^{\pi}\tau^{1-s}.\,|\,\lambda_m(\tau)\,|\,d\tau<\pi^2/4s\,m^{1-s};\ 0<s\leqq 1.$$

Для оценки интеграла I_1 воспользуемся неравенством (2.3) при любом s, удовлетворяющем условию $0<s<1$. При помощи (2.5) — (2.7) получаем

(2.8) $$|\,I_1\,|\leqq(3\pi^2/8s^2\,(1-s)).\|\,\partial f/\partial x\,\|^s.\|\,\partial f/\partial y\|^{1-s}\,n^{-s}\,m^{s-1};\ 0<s<1.$$

Здесь s — произвольное, но его можно выбрать, исходя из минимальности правой части. Легко видеть, что $\varphi(s)=s^2(1-s)$ имеет максимум при $s=2/3$ и $\varphi(2/3)=4/27$. Тогда (2.8) примет вид

(2.8′) $$|\,I_1\,|\leqq 3\pi^2\,27/32\,\|\,\partial f/\partial x\,\|^{2/3}.\|\,\partial f/\partial y\,\|^{1/3}\,n^{-2/3}\,m^{-1/3}.$$

Далее к I_2 применим неравенства (2.3) и (2.6) при $s=0$.

$$|\,I_2\,|\leqq 2\,\pi^{-2}\,\|\,\partial f/\partial y\,\|\int\limits_{1/n}^{\pi}|\,(\sin nt-2n\sin t)/4n\sin^2(t/2)\,|\,dt$$

(2.9) $$\times\int\limits_0^{1/m}\tau(\sin m\,\tau/4m\,.\sin^2(\tau/2))\,d\tau\leqq(3\pi^2/8m).\|\,\partial f/\partial y\,\|\,.[\ln\pi+\ln n]$$
$$<(3\pi^2/2).\|\,\partial f/\partial y\,\|\,m^{-1}\ln n,\ \ n\geqq 2.$$

Для оценки интеграла I_3

$$I_3=(1/2\pi^2)\int_{1/n}^{\pi}\{\int_{1/m}^{\pi}\Delta f(x,\ y;\ t,\ \tau)\,\lambda_m(\tau)\,d\tau\}\,(\lambda_n(t)-\operatorname{ctg}(t/2))\,dt$$

применим метод, указанный в [12, с. 203]. С этой целью введем обозначение $R_m(\tau)=\int_\tau^\pi \lambda_m(\theta)\,d\theta$. Легко показать, что

$$|R_m(\tau)|\leqq(2m\,.\sin(\tau/2))^{-2}\,|\int_\tau^\pi \sin m\theta\,d(m\theta)|\leqq\pi^2/2m^2\tau^2. \tag{2.10}$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned}P\equiv\int_{1/m}^{\pi}\Delta f(x,\ y;\ t,\ \tau)\,\lambda_m(\tau)\,d\tau&=\int_{1/m}^{\pi}\Delta f(x,\ y;t,\ \tau)\,d[-R_m(\tau)]\\&=-R_m(\tau)\,.\,\Delta f(x,\ y;\ t,\ \tau)\Big|_{1/m}^{\pi}+\int_{1/m}^{\pi}R_m(\tau)\,.[f_y'(x+t,\ y+\tau)\\&\quad+f_y'(x+t,\ y-\tau)-f_y'(x-t,\ y+\tau)-f_y'(x-t,\ y-\tau)]\,d\tau.\end{aligned} \tag{2.11}$$

На основании (2.3) при $s=0$ и (2.10), из (2.11) вытекает

$$|P|\leqq|\Delta f(x,\ y;\ t,\ 1/m)|\,.\,|R_m(1/m)|+4\,\|\partial f/\partial y\|\int_{1/m}^{\pi}|R_m(\tau)|\,d\tau$$

$$\leqq(4/m)\,\|\partial f/\partial y\|\,\pi^2/2+2\pi^2m^{-2}\,\|\partial f/\partial y\|\int_{1/m}^{\pi}\tau^{-2}\,d\tau<4\pi^2\,\|\partial f/\partial y\|\,m^{-1}.$$

При помощи последней оценки для I_3 будем иметь

$$|I_3|\leqq(3\pi^2/2m)\ \|\partial f/\partial y\|\,.[\ln\pi+\ln n]<(9\pi^2/2)\,\|\partial f/\partial y\|\,m^{-1}\ln n,\ n\geqq2. \tag{2.12}$$

Для интеграла I из (2.4), (2.8′), (2.9) и (2.12) получаем

$$|I|<(81\,\pi^2/32)\,\|\partial f/\partial x\|^{2/3}.\,\|\partial f/\partial y\|^{1/3}\,n^{-2/3}\,m^{-1/3}+6\pi^2\,\|\partial f/\partial y\|\,m^{-1}\ln n. \tag{2.13}$$

Аналогичными рассуждениями можно показать, что

$$|I^*|<(81\pi^2/32)\,\|\partial f/\partial x\|^{1/3}.\,\|\partial f/\partial y\|^{2/3}\,n^{-1/3}\,m^{-2/3}+6\pi^2\,\|\partial f/\partial x\|\,n^{-1}\ln m. \tag{2.14}$$

Из (2.2), (2.13) и (2.14) вытекает (2.1). Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Как видно из результатов (2.9) и (2.12), ради упрощения выкладок, исключаются случаи $n=1$; $m\geqq1$ и $n\geqq1$; $m=1$ в оценке (2.1).

Л е м м а 2. *Пусть* $f(x,\ y)\in C$. *Если тригонометрический полином* $T_{n,m}$ *порядка* n (m) *по переменной* x (y) *удовлетворяет условию*

$$\|f(x,\ y)-T_{n,m}(x,\ y)\|\leqq C_1\,.[\omega(f;\ 1/n,\ 0)+\omega(f;\ 0,\ 1/m)],\ \ C_1=\mathrm{const}, \tag{2.15}$$

то

$$\left.\begin{array}{l}\|\partial T_{n,m}/\partial x\|\\ \|\partial T_{n,m}/\partial y\|\end{array}\right\}\leqq C_2.[\omega(f;\ 1/n,\ 0)+\omega(f;\ 0,\ 1/m)]. \tag{2.16}$$

$$\times\begin{cases}n\\ m\end{cases};\ C_2<(1+2C_1)/2\sin 1/2.$$

Доказательство. Как известно, из результатов С. Б. Стечкина и С. М. Никольского [11] следует, что для любых целых неотрицательных k и l и $0<\delta_1<2\pi/n$, $0<\delta_2<2\pi/m$ имеет место неравенство

$$\|\partial^{k+l}T_{n,m}/\partial x^k\partial y^l\|\leqq(n/2\sin(n\delta_1/2))^k.(m/2\sin(m\delta_2/2))^l. \tag{2.17}$$

$$\times\|\Delta^k_{\delta_1}\Delta^l_{\delta_2}T_{n,m}(x,y)\|,$$

где $\Delta^k_t\Delta^l_\tau f(x,y)=\sum\limits_{\nu=0}^{k}\sum\limits_{\mu=0}^{l}(-1)^{k+l-\nu-\mu}\binom{k}{\nu}\binom{l}{\mu}.f(x+\nu t,\ y+\mu\tau)$

конечная разность k-ого порядка по x и l-ого порядка по y. В частности, при $k=1$, $l=0$, $\delta_1=1/n$ и $k=0$, $l=1$, $\delta_2=1/m$ из (2.17) получаем

$$\|\partial T_{n,m}/\partial x\|\leqq(2\sin(1/2))^{-1}n\,\omega(T_{n,m};\ 1/n,\ 0); \tag{2.18}$$

$$\|\partial T_{n,m}/\partial y\|\leqq(2\sin(1/2))^{-1}m\,\omega(T_{n,m};\ 0,\ 1/m).$$

Опираясь на основные свойства модулей непрерывности [14] и в силу условия (2.15), будем иметь

$$\begin{aligned}&\omega(T_{n,m};\ 1/n,\ 0)\leqq\omega(f;\ 1/n,\ 0)+\omega(T_{n,m}-f;\ 1/n,\ 0)\\ &\leqq\omega(f;\ 1/n,\ 0)+2\|T_{n,m}-f\|\leqq\omega(f;\ 1/n,\ 0)+2C_1.[\omega(f;\ 1/n,\ 0)\\ &+\omega(f;\ 0,\ 1/m)]<(1+2C_1)[\omega(f;\ 1/n,\ 0)+\omega(f;\ 0,\ 1/m)].\end{aligned} \tag{2.19}$$

Совершенно аналогично выводим

$$\omega(T_{n,m};\ 0,\ 1/m)<(1+2C_1)[\omega(f;\ 1/n,\ 0)+\omega(f;\ 0,\ 1/m)]. \tag{2.20}$$

Из (2.18)—(2.20) вытекает (2.16).

Теорема 2. *Пусть $f(x,y)\in C$ и $\tilde f(x,y)\in C$. Тогда**

$$\varrho_{n,m}(\tilde f)=\|\tilde f(x,y)-\sigma_{n-1,m-1}(\tilde f)\|\leqq C^*\{(1+\ln n+\ln m)[\omega(f;\ 1/n,\ 0)+\omega(f;\ 0,\ 1/m)]+E_{n+1,m+1}(f)\},\ C^*=\text{const}. \tag{2.21}$$

Доказательство. Положим $T_{2n,2m}(x,y)\equiv\tau_{2n,2m;n,m}(f;\ x,y)=(n+1)^{-1}(m+1)^{-1}\sum_{\nu=n}^{2n}\sum_{\mu=m}^{2m}s_{\nu,\mu}(f;\ x,y)$ и отметим, что в силу (1.5)

$$\|f(x,y)-T_{2n,2m}(x,y)\|\leqq 10\,E_{n+1,m+1}(f). \tag{2.22}$$

Имеем, очевидно,

$$\|\tilde f-\sigma_{n-1,m-1}(\tilde f)\|\leqq\|\tilde f-T_{2n,2m}(\tilde f)\| \tag{2.23}$$

$$+\|\sigma_{n-1,m-1}[T_{2n,2m}(\tilde f)-\tilde f]\|+\|T_{2n,2m}(\tilde f)-\sigma_{n-1,m-1}(T_{2n,2m}(\tilde f))\|.$$

---

* Замечание к лемме 1 относится и к теореме 2.

Из (2.22) следует

$$\| \widetilde{f} - T_{2n,2m}(\widetilde{f}) \| \leqq 10\, E_{n+1,m+1}(\widetilde{f}), \tag{2.24}$$

а в силу (1.2) имеем также

$$\| \sigma_{n-1,m-1}[T_{2n,2m}(\widetilde{f}) - (\widetilde{f})] \| \leqq 10\, E_{n+1,m+1}(\widetilde{f}). \tag{2.25}$$

Осталось оценить лишь последнее слагаемое в правой части (2.23).

Пользуясь леммой 1, получаем

$$\begin{aligned} &\| T_{2n,2m}(\widetilde{f}) - \sigma_{n-1,m-1}[T_{2n,2m}(\widetilde{f})] \| = \varrho_{n,m}[T_{2n,2m}(\widetilde{f})] \\ &= \varrho_{n,m}[\widetilde{T}_{2n,2m}(f)] \leqq 3\pi^2 (\| \partial T_{2n,2m}/\partial x \| . \| \partial T_{2n,2m}/\partial y \| \, n^{-1} . m^{-1})^{1/3} \\ &\times [\| \partial T_{2n,2m}/\partial x \|^{1/3} n^{-1/3} + \| \partial T_{2n,2m}/\partial y \|^{1/3} \; m^{-1/3}] \\ &+ 6\pi^2 [\partial T_{2n,2m}/\partial x \| \, n^{-1} \ln m + \| \partial T_{2n,2m}/\partial y \| \, m^{-1} \ln n. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Но из работы [15] следует, что для любой 2π-периодической (по обеим переменным) функции $f(x, y) \in C$ имеет место

$$E_{n+1,m+1}(f) \leqq 8K[\omega(f;\; 1/n, 0) + \omega(f;\; 0,\; 1/m)], \;\; (K = 8/3 - 45\sqrt{3}/38\,\pi). \tag{2.27}$$

Следовательно, в силу (2.22) $\| f - T_{2n,2m}(f) \| \leqq 160\, K . [\omega(f;\; 1/2n,\; 0) + \omega(f;\; 0,\; 1/2m)]$. Сопоставляя это неравенство с леммой 2 (при $C_1 = 160\,K$), выводим

$$\left.\begin{matrix} \| \partial T_{2n,2m}/\partial x \| \\ \| \partial T_{2n,2m}/\partial y \| \end{matrix}\right\} \leqq 2C_2 [\omega(f;\;\; 1/2n,\;\; 0) + \omega\;(f;\;\; 0,\;\; 1/2m)] \begin{cases} n \\ m \end{cases}$$

$$\leqq C_3 [\omega(f;\; 1/n,\;\; 0) + \omega(f;\;\; 0,\;\;\; 1/m)] \begin{cases} n \\ m \end{cases}\!; \;\; C_3 < (1 + 320\,K)/\sin(1/2).$$

Отсюда и из (2.26) вытекает

$$\varrho_{n,m}[T_{2n,2m}(\widetilde{f})] \leqq 6\pi^2 C_3\; [\omega(f;\; 1/n,\;\; 0) + \omega(f;\; 0,\; 1/m)](1 + \ln n + \ln m). \tag{2.28}$$

Наконец, из (2.23) — (2.25) и (2.28) получаем (2.21), и теорема доказана с $C^* = 6\pi^2 . C_3$.

И здесь можно сказать, что доказательство проходит для любого пространства $L_p\,(p \geqq 1)$.

Следует отметить, что рассуждения, примененные в ходе доказательства теоремы 2, имеют весьма общий характер. Это позволяет сформулировать и обосновать аналогичные предложения для любого, обладающего данными свойствами, линейного метода $U_{n,m}$ приближения функций.

Теорема 3. *Пусть* $U_{n,m}(f)$, *построенный для любой функции* $f(x, y) \in C$, *обладает следующими свойствами:*

а) $$\| U_{n,m}(f) \| \leqq M \| f \|;$$

б) *если* f — *дифференцируема и* $\partial f/\partial x,\; \partial f/\partial y \in C$, *то*

$$\begin{gathered} \| f - U_{n,m}(f) \| \leqq N_1 (\| \partial f/\partial x \|/n)^s (\| \partial f/\partial y \|/m)^{1-s} \\ + N_2 \| \partial f/\partial x \|/n + N_3 \| \partial f/\partial y \|/m \\ (n,\; m = 1,\; 2,\; 3, \ldots;\; 0 \leqq s \leqq 1). \end{gathered}$$

Тогда имеет место оценка $\|f-U_{n,m}(f)\|\leqq\{A_1(1+M)+A_2(N_1+N_2+N_3)\}.[\omega(f;\ 1/n,\ 0)+\omega(f;\ 0,\ 1/m)]$, *где* $A_1=8K$, $A_2<(1+16\ K)(2\sin 1/2)^{-1}$. *Постоянная* K *указана в* (2.27).

Теорема 4. *Пусть линейный метод* $U_{n,m}(f)$, *построенный для любой функции* $f\in C$, *обладает свойствами*: *а*) *и б*), *если* $\widetilde{f}\in C$, f — *дифференцируема и* $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y\in C$, *то*

$$\|\widetilde{f}-U_{n,m}(\widetilde{f})\|\leqq N_1(\|\partial f/\partial x\|/n)^s.(\|\partial f/\partial y\|/m)^{1-s}+N_2\|\partial f/\partial x\|/n+N_3\|\partial f/\partial y\|/m$$

$$(n,\ m=1,\ 2,\ 3,\ldots;\ 0\leqq s\leqq 1).$$

Тогда $\|\widetilde{f}-U_{n,m}(\widetilde{f})\|\leqq A_2^*(N_1+N_2+N_3)[\omega(f;\ 1/n,\ 0)+\omega(f;0,\ 1/m)]+10(1+M)E_{n+1,m+1}(\widetilde{f})$, *где* $A_2^*<(1+320\ K)\sin^{-1}1/2$. *Постоянная* K *указана в* (2.27).

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Бернштейн. О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени. *Сообщения Харьк. мат. об-ва* (серия 2), **13**, 1912, 49—194.
2. С. М. Никольский. Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами. *Труды Мат. инст. АН СССР*, **15**, 1945, 1—76.
3. G. Alexits. Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction par les moyennes de la série de Fourier. *Mat. es Fiz. Lapok*, **48**, 1941, 410—422.
4. M. Zamansky. Classes de saturation de certains procédés d'approximation des séries de Fourier des fonctions continués et application à quelques problèmes d'approximation. *Ann. Sci. Ecole norm. sup.*, **66**, 1949, 19—93.
5. А. В. Ефимов. О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и суммами Фейера. *Известия АН СССР, сер. мат.*, **22**, 1958, 81—116.
6. А. В. Ефимов. Приближение сопряженных функций суммами Фейера. *Успехи мат наук*, **14**, 1959, № 1, 183—188.
7. С. Б. Стечкин. О приближении периодических функций суммами Фейера. *Труды Мат. инст. АН СССР*, **62**, 1961, 48—60.
8. Г. К. Лебедь, А. А. Авдеенко. О приближении периодических функций суммами Фейера. *Известия АН СССР, сер. мат.*, **35**, 1971, № 1, 83—92.
9. О. Д. Габисония. Приближение функций многих переменных некоторыми линейными методами. *Сообщения АН Груз. ССР*, **40**, 1965, № 3, 229—232.
10. В. О. Дудас. Приближения непрерывных периодических функций суммами Фейера. Вопросы теории приближений функций и ее приложений. Киев, 1976, 109—115.
11. А. И. Буадзе. О свойстве сопряженных функций двух переменных. *Сообщения АН Груз. ССР*, **52**, 1968, № 2, 293—296.
12. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды. I. Москва, 1965.
13. С. Б. Стечкин. О суммах Валле—Пуссена. *Доклады АН СССР*, **80**, 1951, № 4, 545—548.
14. С. Б. Стечкин. О порядке наилучших приближений непрерывных функций. *Известия АН СССР*, **15**, 1951, № 3, 219—242.
15. В. П. Бугаец, В. Т. Мартынюк. Точные константы приближения непрерывных функций интегралами Джексона. *Укр. мат. ж.*, **26**, 1974, № 4, 435—443.

Пловдивский университет
им. Паисия Хилендарского
4000 Пловдив Болгария

Получено 22. 8. 1977.