КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'77
София . 1980, с. 179—189

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'77
Sofia . 1980, p. 179—189

О НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИЙ КЛАССОВ $V[v(n)]$

З. А. Чантурия

Резюме. В статье обобщаются теоремы Н. Винера и С. М. Лозинского о непрерывности функций ограниченной вариации на более широкие классы $V[v(n)]$. Доказано, что полученные теоремы являются в некотором смысле окончательными.

Изучается также вопрос о зависимости между различными классами $V[v_1]$ и $V[v_2]$, а также между $V[v(n)]$ и $V\Phi$.

Известен следующий критерий Винера [1] (см. также [2, с. 205]) для непрерывности функций ограниченной вариации: пусть 2π-периодическая функция f имеет ограниченную вариацию на периоде, удовлетворяет условию

$$\min\{f(x-0),\ f(x+0)\}\leqq f(x)\leqq \max\{f(x-0),\ f(x+0)\} \tag{1}$$

в каждой точке $x\in[0,\ 2\pi]$, a_k и b_k—коэффициенты Фурье функции f и $\varrho_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2}$. Тогда для непрерывности функции f необходимо и достаточно каждое из следующих условий:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2\varrho_k^2=o(n) \quad \text{при} \quad n\to\infty \tag{2}$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} k\varrho_k=o(n) \quad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{3}$$

Достаточность условия (3) для непрерывности функции $f\in V$ вытекает также из одного результата Л. Фейера [4], а необходимость доказана также С. Сидоном [5].

С. М. Лозинский [6, 7] показал, что для непрерывности функции $f\in V$ необходимо и достаточно каждое из следующих условий:

$$\sum_{k=n}^{\infty} \varrho_k^2=o(1/n) \tag{4}$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} \varrho_k=o(\ln n). \tag{5}$$

Б. И. Голубов [8—11] доказал, что условия (2) — (5) необходимы и достаточны для непрерывности функций класса V_p при $1<p<2$ (определение классов V_p приводится в § 1) и достаточны при $p\geqq 2$. Там же доказано, что при $p\geqq 2$ для включения $f\in C(0, 2\pi)\cap V_p$ не существует необходимых и достаточных условий, выраженных в терминах модулей коэффициентов Фурье.

В работе рассматривается задача: пусть функция f всюду ограничена на периоде, удовлетворяет условию (1) и принадлежит классу $V[v(n)]$ (определение этого класса дано в § 1). Что нужно потребовать от $v(n)$, чтобы условия (2) — (5) являлись необходимыми и достаточными для непрерывности f.

Некоторые результаты этой статьи опубликованы без доказательства в [12] и [13].

1. Определения классов V_Φ и $V[v(n)]$. Понятие вариации функций было впервые введено К. Жорданом. Н. Винер обобщил понятие вариации и ввел функции ограниченной p-вариации. Наконец, Л. Юнг [14] ввела понятие функции ограниченной Φ-вариации.

Пусть $\Phi(u)$ — строго возрастающая непрерывная функция при $u\geqq 0$ и $\Phi(0)=0$. Говорят, что периодическая с периодом 2π функция имеет ограниченную Φ-вариацию или принадлежит классу V_Φ, если

$$v_\Phi(f)=\sup\left\{\sum_{k=1}^{n}\Phi(|f(x_i)-f(x_{i-1})|):\Pi\right\}<\infty,$$

где $\Pi=(0\leqq x_0<x_1<\ldots<x_n\leqq 2\pi)$ — произвольное разбиение периода. При $\Phi(u)=u$ получается класс V Жордана, при $\Phi(u)=u^p$, $1<p<\infty$ классы V_p Винера. Отметим, что функции класса V_Φ могут иметь разрывы лишь первого рода и справедливы строгие вложения $\mathrm{Lip}\ 1/p\subset V_p\subset V_q, 1\leqq p<q$. Введем теперь понятие модуля изменения функции [12] (см. также [15,16]).

Определение. *Пусть f ограничена на периоде. Модулем изменения функции f называется функция целочисленного неотрицательного аргумента $v(n, f)$, определенная так: $v(0, f)=0$, а при $n\geqq 1$*

$$v(n, f)=\sup\left\{\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{2k+1})-f(x_{2k})|:\Pi_n\right\},$$

где Π_n — произвольное разбиение интервала $(0, 2\pi)$ на n непересекающихся интервалов (x_{2k}, x_{2k+1}), $k=0, 1,\ldots, n-1$.

Пусть $v(n)$ — неубывающая выпуклая вверх функция при $n\geqq 0$ и $v(0)=0$. Обозначим через $V[v(n)]$ класс тех функций f, для которых $v(n, f)=O(v(n))$ при $n\to\infty$.

Зависимость между различными $V[v_1(n)]$ и $V[v_2(n)]$, а также классами V_Φ и $V[v(n)]$ даются следующими теоремами.

Теорема 1. *Для того чтобы выполнялось $V[v_1(n)]=V[v_2(n)]$, необходимо и достаточно, чтобы $v_1(n)\sim v_2(n)$**.

* Т. е. существуют две положительные константы A и B такие, что $Av_1(n)\leqq v_2(n)\leqq Bv_1(n)$ для $n\geqq 1$.

Если

$$(6)\qquad \underline{\lim}_{n\to\infty} v_1(n)/v_2(n)=0 \quad \text{и} \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} v_1(n)/v_2(n)<\infty,$$

то справедливо строгое вложение $V[v_1(n)]\subset V[v_2(n)]$.

Доказательство. Если $v_1\sim v_2$, то из условия $f\in V[v_1]$ вытекает $v(n, f)=O(v_1(n))=O(v_2(n))$, т. е. $f\in V[v_2(n)]$. Так же получим, что $V[v_2]\subset V[v_1]$, т. е.

$$(7)\qquad V[v_1]=V[v_2].$$

Пусть теперь справедливо (7).

Построим кусочно-линейную функцию $f_v(x)$ следующим образом: $f_v(x)$ непрерывна на $(0, 2\pi)$; $f(0)=0$; на интервалах $[4k\pi/(2k+1), (2k+1)\pi/(k+1)]$, $k=0, 1, \ldots$ она возрастает, а на интервалах $[(2k-1)\pi/k, 4k\pi/(2k+1)]$ убывает, $|f_v(2\pi k/(k+1))-f_v(2\pi(k-1)/k)|=v(k)-v(k-1)$, $k=1, 2, \ldots$. Вне $[0, 2\pi)$ продолжается периодически.

Легко видеть, что $v(n, f_v)=\Sigma_{k=1}^n[v(k)-v(k-1)]=v(n)$. Если теперь взять функцию $f_{v_1}\in V[v_1]=V[v_2]$, то $v(n, f_{v_1})=v_1(n)=O(v_2(n))$, т. е. $v_1(n)\leqq Bv_2(n)$.

Так же получим, что $v_2(n)\leqq Av_1(n)$ или окончательно $v_1\sim v_2$.

Если теперь выполнено (6), то из $\overline{\lim}_{n\to\infty}(v_1(n)/v_2(n))<\infty$ вытекает, что $V[v_1]\subset V[v_2]$, а из того, что $\underline{\lim}_{n\to\infty}(v_1(n)/v_2(n))=0$, следует $V[v_2]\ni f_{v_2}\notin V[v_1]$.

Докажем теперь

Теорема 2. *Если $\Phi(u)$ выпукла и $f\in V_\Phi$, то*

$$(8)\qquad v(n, f)\leqq c(f)\, n\,\Phi^{-1}(1/n),$$

т. е.

$$(9)\qquad V_\Phi\subset V[n\,\Phi^{-1}(1/n)].$$

При условии $\Phi(u)\not\approx u$ ни в каком интервале $[0, \delta]$, $\delta>0$, последнее вложение строгое.

Доказательство. Применяя неравенство Иенсена [17, с. 92], получим

$$\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{2k+1})-f(x_{2k})|\leqq n\,\Phi^{-1}\Big((1/n)\sum_{k=0}^{n-1}\Phi(|f(x_{2k+1})-f(x_{2k})|)\Big)\leqq n\Phi^{-1}(n^{-1}v_\Phi(f)),$$

откуда $v(n, f)\leqq n\,\Phi^{-1}(n^{-1}v_\Phi(f))$.

Так как $\Phi^{-1}(u)$ вогнута, то при $\lambda>1$, $\Phi^{-1}(\lambda x)<\lambda\Phi^{-1}(x)$, поэтому

$$v(n,f)\leqq\begin{cases} n\,\Phi^{-1}(1/n) & \text{при}\quad v_\Phi(f)\leqq 1,\\ v_\Phi(f)\,n\,\Phi^{-1}(1/n) & \text{при}\quad v_\Phi(f)>1,\end{cases}$$

т. е. доказано (8) или что то же самое (9).

Докажем теперь второе утверждение теоремы. Ясно, что если $\Phi(u)\not\approx u$ ни в каком интервале $[0, \delta]$, то

$$(10)\qquad \lim_{u\to 0} u^{-1}\,\Phi(u)=0.$$

При этом условии можно построить последовательность $\{\beta_n\}$, обладающую следующими свойствами:

1) $\beta_n \downarrow 0$;

2) $\Sigma_{n=1}^{\infty} \Phi(\beta_n) = \infty$;

3) $\Sigma_{n=1}^{N} \beta_n \leqq cN\Phi^{-1}(1/N)$, $N=1, 2, \ldots$.

Построение этой последовательности идет по схеме С. Б. Стечкина [2, с. 625—627].

Сперва определим возрастающую последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Положим $n_1=1$, и если $n_1, n_2, \ldots, n_k$ уже определены, то пусть $n_{k+1}=\min\{N; N\Phi^{-1}(1/N) > 2n_k\Phi^{-1}(1/n_k)\}$ (то, что такое n_{k+1} существует, вытекает из (10), так как при этом условии $N\Phi^{-1}(1/N)\to\infty$).

Таким образом при $n_k \leqq n < n_{k+1}$

$$n\Phi^{-1}(1/n) \leqq 2n_k\Phi^{-1}(1/n_k),\ n_{k+1}\Phi^{-1}(1/n_{k+1}) > 2n_k\Phi^{-1}(1/n_k). \tag{11}$$

Отметим, что $n_{k+1} > 2n_k$, $k=1, 2, \ldots$ (или $n_{k+1}-n_k > n_k/2$). Действительно, если $n_k < n \leqq 2n_k$, то в силу монотонности $\Phi^{-1}(u)$

$$n\Phi^{-1}(1/n) \leqq 2n_k\Phi^{-1}(1/n_k),$$

и, следовательно, $n \neq n_{k+1}$. Последовательность $\{\beta_n\}$ определим так

$\beta_1 = \Phi^{-1}(1)$, $\beta_n = \Phi^{-1}(1/n_{k+1})$, $n_k < n \leqq n_{k+1}$, $k=1,2,\ldots$ В силу монотонности $\Phi^{-1}(u)$, $\{\beta_n\}$ удовлетворяет условию 1).

Докажем 2): Полагая $n_0=0$, будем иметь:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Phi(\beta_n) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}}\Phi(\Phi^{-1}(1/n_{k+1})) = \sum_{k=0}^{\infty}(n_{k+1}-n_k)/n_{k+1} \geqq \sum_{k=0}^{\infty} 1/2 = \infty.$$

Остается доказать, что выполнено 3): Пусть $n_{k-1} < N \leqq n_k$, причем $N>1$, т. е. $k>1$. Имеем:

$$\sum_{m=1}^{N}\beta_m = \sum_{i=1}^{k-1}\sum_{m=n_{i-1}+1}^{n_i}\beta_m + \sum_{m=n_{k-1}+1}^{N}\beta_m = \sum_{i=1}^{k-1}(n_i-n_{i-1})\Phi^{-1}(1/n_i)$$

$$+(N-n_{k-1})\Phi^{-1}(1/n_k) \leqq \sum_{i=1}^{k-1} n_i\Phi^{-1}(1/n_i) + N\Phi^{-1}(1/N).$$

Теперь в силу (11) $n_i\Phi^{-1}(1/n_i) < 2^{i-k+1}n_{k-1}\Phi^{-1}(1/n_{k-1})$, $i=1, 2, \ldots, k-2$. Подставляя эти оценки в предыдущее неравенство и используя то, что $n\Phi^{-1}(1/n)\uparrow$, получим

$$\sum_{m=1}^{N}\beta_m \leqq \sum_{i=1}^{k-1} 2^{i-k+1} n_{k-1}\Phi^{-1}(1/n_{k-1}) + N\Phi^{-1}(1/N)$$

$$\leqq N\Phi^{-1}(1/N)\sum_{i=1}^{k-1} 2^{i-k+1} + N\Phi^{-1}(1/N) \leqq cN\Phi^{-1}(1/N),$$

т. е. справедливо 3).

Теперь искомую функцию $f_0(x)$ построим так:

$$f_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 2\pi/(2n+1), \quad n=0, 1, 2, \ldots \\ \beta_n & \text{при } x = 2\pi/2n, \quad n=1, 2, \ldots \\ 0 & \text{при } x=0, \\ & \text{для остальных } x \text{ определим линейно.} \end{cases}$$

Так как $\Sigma_{n=1}^{N}\Phi(|f(2\pi/2n)-f(2\pi/(2n+1))|)=\Sigma_{n=1}^{N}\Phi(\beta_n)\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}\infty$, то $f_0\notin V_\Phi$. С другой стороны,

$$v(n,\ f)=2\sum_{k=1}^{[n/2]}|f(2\pi/2k)-f(2\pi/(2k+1))|+(n-2[n/2])\,f(2\pi/2([n/2]+1))$$

$$\leqq 2\sum_{k=1}^{n}\beta_k\leqq cn\,\Phi^{-1}(1/n),$$

т. е. $f_0\in V[n\Phi^{-1}(1/n)]$.

Теорема 2 доказана полностью.

Следствие 1. Если $p>1$, то для класса Винера V_p справедливо строгое включение $V_p\subset V[n^{1-1/p}]$. Для класса Жордана V справедливо $V=V[1]$.

Замечание 1. Известно, что функции V_p имеют определенный запас интегральной гладкости, а именно, если $f\in V_p$, то $\omega_p(\delta,f)\leqq v_p(f)\,.\,\delta^{1/p}$ (см., например, [18] или [9]).

Для класса $V[n^{1-1/p}]$, $p>1$, который содержит V_p, эта оценка не имеет места. Построим соответствующий пример.

Пусть $a_0=0$, $a_n=\Sigma_{k=1}^{n}k^{-2}$. Определим $f(x)$ на $[0,\ 2\pi]$ таким образом

$$f(x)=\begin{cases} n^{-1/p} & \text{при}\quad a_{2n-1}\leqq x\leqq a_{2n},\quad n=1,\,2,\dots.\\ 0 & \text{для остальных } x\in[0,\ 2\pi].\end{cases}$$

Вне $[0,\ 2\pi]$ продолжим периодически. Ясно, что $v(n,f)\leqq 2\,\Sigma_{k=1}^{n}k^{-1/p}=O(n^{1-1/p})$, т. е. $f\in V[n^{1-1/p}]$.

Оценим теперь $\omega_p(\delta,f)$. Пусть $\delta\leqq 1$, тогда

$$\omega_p(\delta,\ g)=\sup_{|h|\leqq\delta}\{\int_0^{2\pi}|f(t+h)-f(t)|^p\,dt\}^{1/p}\geqq\{\int_0^{2\pi}|f(t+\delta)-f(t)|^p\,dt\}^{1/p}.$$

Подберем N так, чтобы $a_N-a_{N-1}=N^{-2}\geqq\delta>(N+1)^{-2}=a_{N+1}-a_N$. Тогда

$$\omega_p(\delta,\ g)\geqq\{\int_0^{a_N}|f(t+\delta)-f(t)|^p\,dt\}^{1/p}\geqq\{\sum_{n=1}^{N}\int_{a_n-\delta}^{a_n}|f(t+\delta)-f(t)|^p\,dt\}^{1/p}$$

$$\geqq\{2\delta\sum_{n=1}^{[N/2]}n^{-1}\}^{1/p}\geqq C\,\delta^{1/p}\ln^{1/p}N>C\delta^{1/p}\ln^{1/p}\delta^{-1}.$$

2. Условия непрерывности функции классов $V[v(n)]$. Докажем сперва

Теорема 3. *Если $v(n)=o(n)$, то каждое из условий (2) — (5) достаточно для включения $f\in V[v(n)]\cap C(0,\ 2\pi)$.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобится

Теорема 4. *Для того чтобы функция f не имела разрывов второго рода, необходимо и достаточно, чтобы*

(12) $$v(n,\ f)=o(n).$$

Доказательство. Достаточность. Пусть выполнено (12). Докажем, что f не имеет разрывов второго рода. Допустим противное. Тогда существует точка $x_0 \in [0, 2\pi]$, в которой не существует либо $f(x_0-0)$, либо $f(x_0+0)$. Для определенности предположим, что не существует правый предел. Значит, $-\infty < B = \underline{\lim}_{x\to x_0+0} f(x) < \overline{\lim}_{x\to x_0+0} f(x) = A < \infty$.

Отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность $x_n \downarrow x_0$ такая, что $f(x_{2n}) > A-\varepsilon$ и $f(x_{2n+1}) < B+\varepsilon$. Взяв $\varepsilon = (A-B)/3 > 0$, получим

$$v(n, f) \geqq \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{2k}) - f(x_{2k+1})| \geqq (A-\varepsilon-B-\varepsilon)\, n = n\,(A-B)/3,$$

что противоречит (12).

Необходимость. Пусть f не имеет разрывов второго рода. Если f непрерывна, то из оценки ([12, 19], теорема 1) $v(n, f) < cn\,\omega(1/n, f)$, где $\omega(\delta, f)$ — модуль непрерывности функции f, следует оценка (12).

Пусть f имеет лишь точки разрыва первого рода.

Применим следующую теорему О. Д. Церетели: [20, с. 42; 21, с. 131]: Пусть f определена на отрезке $[\alpha, \beta]$ и имеет лишь точки разрыва первого рода. Тогда существуют функции $\chi(x)$ и $F(t)$, удовлетворяющие следующим условиям: функция $\chi(x)$ определена и возрастает на $[\alpha, \beta]$, функция $F(t)$ непрерывна на $[\chi(\alpha), \chi(\beta)]$ и $f(x) = F(\chi(x))$.

В силу этой теоремы для $f(x) = F(\chi(x))$, так как $\chi(x)$ возрастающая функция, справедливо соотношение $v(n, f) = v(n, F)$. Но для непрерывной функции $F(t)$ соотношение (12) справедливо и значит то же самое справедливо и для f. Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 3. В силу теоремы Б. И. Голубова [8, теорема 3], если функция f не имеет разрывов первого рода, то условия (2) — (5) являются достаточными для непрерывности f. Отсюда и из теоремы 4 следует справедливость теоремы 3.

Рассмотрим теперь вопрос, когда являются условия (2) — (5) необходимыми и достаточными. Сперва докажем, что верна

Лемма. *Пусть $v(n)$ модуль изменения и $v(n) = o(n)$, $v(1) > 0$. Тогда существует натуральное n_0 такое, что при $n > n_0$ последовательность $v(n)/n$ строго убывает.*

Доказательство. То, что $v(n)/n$ убывает, вытекает из того, что $v(n)$ выпукла вверх. Допустим, что $v(n)/n$ не убывает строго. Тогда существует последовательность n_k такая, что $v(n_k)/n_k = v(n_k+1)/(n_k+1)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Отсюда получим $v(n_k)/n_k = v(n_k+1) - v(n_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, или $n_k^{-1} \Sigma_{m=1}^{n_k} [v(m) - v(m-1)] = v(n_k+1) - v(n_k)$.

Но так как $v(n)$ выпукла вверх, то $v(n) - v(n-1)$ убывает, поэтому из последнего равенства следует, что для $1 \leqq n \leqq n_k+1$ $v(n) - v(n-1) = v(1)$, т. е. $v(n) = n\,v(1)$, $1 \leqq n \leqq n_k+1$.

В силу того, что n_k бесконечная последовательность, последнее равенство справедливо для всех n, т. е. $v(n) \neq o(n)$, что противоречит условиям леммы. Лемма доказана.

Теорема 5. *Пусть модуль изменения $v(n)$ удовлетворяет условию*

(13) $$\Sigma_{n=1}^{\infty} n^{-2} v^2(n) < \infty.$$

Тогда, если $f \in V[v(n)]$, то для непрерывности функции f необходимо и достаточно каждое из условий (2) — (5).

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 3. Докажем необходимость условия (4), откуда будут следовать условия (2), (3) и (5) (так как (2) $\Leftrightarrow$ (4) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (5)).

Без ограничения общности можно предполагать, что $f \neq \text{const}$ и $v(n, f) \leqq v(n)$.

Рассмотрим сумму (N-натуральное), $\Sigma_{k=1}^{2N}[f(t+k\pi/N)-f(t+(k-1)\pi/N)]^2 \equiv \xi_N(t)$. При фиксированном N функция $\xi_N(t)$ имеет максимум в некоторой точке $t_0(N) \in [0, 2\pi]$. Покажем, что $\xi_N(t_0(N)) = o(1)$ при $N \to \infty$.

Обозначим через $\sigma_m(N, t_0)$ количество тех чисел k, для которых выполняются неравенства

$$2^{-m-1}v(2^{m+1}) < |f(t_0(N)+k\pi/N) - f(t_0(N)+(k-1)\pi/N)| \leqq 2^{-m} v(2^m),$$
$$m = m_0, m_0+1, \ldots,$$

где m_0 подбирается условием

(14) $$2^{-m_0-1} v(2^{m_0+1}) < \omega(\pi/N, f) \leqq 2^{-m_0} v(2^{m_0})$$

($\omega(\delta, f)$ — модуль непрерывности функции f).

Так как $v(\sigma_m) \geqq v(\sigma_m, f) \geqq \sigma_m(N) \cdot 2^{-m-1} v(2^{m+1})$, т. е. $v(\sigma_m)/\sigma_m \geqq 2^{-m-1} v(2^{m+1})$. Откуда в силу леммы для достаточно больших m $\sigma_m \leqq 2^{m+1}$.

Если N достаточно велико, используя эту оценку, получим

$$\xi_N(t_0) \leqq \sum_{m=m_0}^{\infty} \sigma_m(N)\, 2^{-2m} v^2(2^m) \leqq 2 \sum_{m=m_0}^{\infty} 2^{-m} v^2(2^m) \leqq 4 \sum_{n=2^{m_0-1}+1}^{\infty} n^{-2} v^2(n).$$

Итак, для любого $t \in [0, 2\pi]$ справедливо соотношение

$$\sum_{k=1}^{2N} [f(t+k\pi/N) - f(t+(k-1)\pi/N)]^2 \leqq 4 \sum_{n=2^{m_0-1}+1}^{\infty} n^{-2} v^2(n),$$

где m_0 подобрано условием (14).

Интегрируя, находим

(15) $$\int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{2N} [f(t+k\pi/N) - f(t+(k-1)\pi/N)]^2\, dt$$
$$= 2N\int_0^{2\pi} [f(t+\pi/2N) - f(t-\pi/2N)]^2 dt \leqq 8\pi \sum_{n=2^{m_0-1}+1}^{\infty} n^{-2} v^2(n).$$

Но, как известно [3, с. 384],

(16) $$\int_0^{2\pi} [f(t+h) - f(t-h)]^2\, dt = 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \varrho_k^2 \sin^2 kh.$$

С помощью последнего соотношения с использованием неравенства $\sin x \geqq 2x/\pi$, $x \in [0, \pi/2]$ из (15) получим

(17) $$\sum_{n=2^{m_0-1}+1}^{\infty} n^{-2} v^2(n) \geqq N \sum_{k=1}^{\infty} \varrho_k^2 \sin^2(k\pi/2N) \geqq N \sum_{k=1}^{N} \varrho_k^2 \sin^2(k\pi/2N)$$
$$\geqq N^{-1} \sum_{k=1}^{N} \varrho_k^2 k^2.$$

Но при $N \to \infty$ в силу (14), $2^{m_0} \to \infty$, поэтому из условий теоремы и (17) следует $\lim_{n\to\infty} n^{-1} \Sigma_{k=1}^{n} k^2 \varrho_k^2 = 0$, т. е. необходимость условия (2) и тем самым условий (3) — (5) доказана.

С л е д с т в и е 2. Пусть $f \in V[n^\alpha]$, $0 \leqq \alpha < 1/2$, тогда для непрерывности f необходимы и достаточны условия (2) — (5).

Из этого следствия в силу следствия 1 вытекает справедливость следующей теоремы Б. И. Г о л у б о в а [8]: если $f \in V_p$, $1 < p < 2$, то для непрерывности f необходимы и достаточны условия (2) — (5).

Докажем теперь, что в теореме 5 условие (13) нельзя ослабить, а именно, мы докажем, что справедлива

Т е о р е м а 6. *Пусть модуль изменения $v(n)$ удовлетворяет условию $\sum_{n=1}^\infty n^{-2} v^2(n) = \infty$, тогда в классе $V[v(n)]$ найдется непрерывная функция f_0, для которой условия* (2) *и* (4) *не выполняются.*

Для доказательства нам понадобится

Л е м м а [22, с. 660]. *Пусть даны числа $\nu > 0$ и $\alpha \in (1-\nu, 1)$. Тогда, если $\omega(\delta)$ модуль непрерывности и* $\sum_{n=1}^\infty n^{-\alpha} \omega^\nu (1/n) = \infty$, то найдутся числа B_n $(n = 1, 2, \ldots)$ такие, что

1) $B_n \downarrow 0$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{N} B_n = O(N\omega(1/N))$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} B_n^\nu = \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 6. Без ограничения общности можем предположить, что $v(n) = o(n)$. Если положить

$$\omega(t) = \begin{cases} n^{-1} v(n) & \text{при} \quad t = 1/n, \\ 0 & \text{при} \quad t = 0, \\ \text{линейна для остальных } t \in [0, 1], \end{cases}$$

то $\omega(t)$ непрерывная функция на $[0, 1]$ и $t^{-1}\omega(t) \downarrow$, поэтому [23, с. 109] $\omega(t)$ модуль непрерывности. Взяв в лемме $\alpha = 0$ и $\nu = 2$, получим, что найдется последовательность $\{B_n\}$ со свойствами:

1) $B_n \downarrow$; 2) $\sum_{n=1}^N B_n = O(v(N))$; 3) $\sum_{n=1}^\infty B_n^2 = \infty$.

В силу свойства 3) для любого $n \geqq n_0$ (n_0 — некоторое достаточно большое число) найдется такое число m, что $\sum_{k=m}^{[\sqrt{n}]-1} B_k^2 \geqq 1$. Введем обозначения

$$\tau(n) = \begin{cases} \max\{m; \sum\limits_{k=m}^{[\sqrt{n}]-1} B_k^2 \geqq 1\} & \text{при} \quad n \geqq n_0; \\ 1 & \text{при} \quad 1 \leq n < n_0 \end{cases}$$

и $\varphi(n) = \max\{m;\ \tau(m) \leqq n\}$. Ясно, что $\tau(n) \uparrow \infty$ и $\varphi(n) \uparrow \infty$.

В силу определения имеем $\tau(\varphi(n)) \leqq n$ и $\tau(\varphi(n)+1) > n$, а так как при $n \geqq n_0$ $\tau(n) \leqq \sqrt{n} - 1$, то $n < \tau(\varphi(n)+1) \leqq \sqrt{\varphi(n)+1} - 1$, т. е. $\varphi(n) \geqq (n+1)^2 - 1$, $n \geqq n_0$.

Из определения $\varphi(n)$ легко следует, что

$$\varphi(\tau(n)) \geqq n. \tag{18}$$

Подберем последовательность $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$ и сегменты I_k, $k = 1, 2, \ldots$ таким образом

$$\varepsilon_k=\begin{cases}1/2k^3 & \text{при } 1\leqq k<n_0\\ 1/\varphi^2(k) & \text{при } k\geqq n_0\end{cases}$$

$$I_{2k-1}=[2\sum_{n=1}^{k-1} n^{-2}+\varepsilon_k,\ 2\sum_{m=1}^{k-1} m^{-2}+k^{-2}],\quad k=1,2,\dots$$

$$I_{2k}=[2\sum_{m=1}^{k-1} m^{-2}+k^{-2}+\varepsilon_k,\ \ 2\sum_{m=1}^{k} m^{-2}],\quad k=1,2,\dots.$$

Так как $\varepsilon_k<k^{-2}$, то ни один интервал I_k не пустой, эти сегменты не пересекаются и все они расположены в интервале $[0, \pi^2/2)\subset[0, 2\pi]$.

Сейчас можно построить искомую функцию f_0:

$$f_0(x)=\begin{cases}B_k & \text{при } x\in I_{2k+1},\ k=1,2,\dots,\\ 0 & \text{при } x\in I_{2k} \text{ и } x\in[\pi^2/2, 2\pi] \text{ и } [0, 1],\\ & \text{линейна в остальных точках } [0, 2\pi],\\ & \text{вне } [0, 2\pi] \text{ продолжим периодично.}\end{cases}$$

Ясно, что f_0 непрерывная функция.

Так как $B_n\downarrow 0$, то в силу 2)

$$v(n, f_0)\leqq 2\sum_{k=1}^{[n/2]+1} B_k=O(v([n/2]+1))=O(v(n)),$$

т. е. $f_0\in C(0, 2\pi)\cap V[v(n)]$.

Возьмем n настолько большим, чтобы $\tau(n)\geqq n_0$, тогда при $k\geqq\tau(n)$ $\varepsilon_k=1/\varphi^2(k)$, т. е. в силу (18)

$$\varepsilon_k\leqq\varepsilon_{\tau(n)}=1/\varphi^2(\tau(n))<n^{-2} \tag{19}$$

или

$$\varepsilon_k-n^{-1}<0 \quad \text{для} \quad k\geqq\tau(n). \tag{20}$$

Далее, если $k\leqq\sqrt{n}-1$, то

$$n^{-1}\leqq(k+1)^{-2}<k^{-2}. \tag{21}$$

Из (20) и (21) для $\tau(n)\leqq k\leqq\sqrt{n}-1$ следует

$$[2\sum_{m=1}^{k} m^{-2}+\varepsilon_k-n^{-1},\ 2\sum_{m=1}^{k} m^{-2}]=J_{2k}\subset I_{2k}$$

и

$$[2\sum_{m=1}^{k} m^{-2}+\varepsilon_k,\ 2\sum_{m=1}^{k} m^{-2}+n^{-1}]=J_{2k+1}\subset I_{2k+1}.$$

Из этих соотношений следует, что при $\tau(n)\leqq k\leqq\sqrt{n}-1$ и $x\in J_{2k}$, $f(x)=0$, а $f(x+n^{-1})=B_k$. В силу сказанного, использовав (19), будем иметь для $\tau(n)\geqq n_0$

$$\int_0^{2\pi} |f(t+n^{-1})-f(t)|^2\,dt \geq \sum_{k=\tau(n)}^{[\sqrt{n}]-1} \int_{J_{2k}} |f(t+n^{-1})-f(t)|^2\,dt$$

$$(22)\qquad = \sum_{k=\tau(n)}^{\sqrt{n}-1} B_k^2 (n^{-1}-\varepsilon_k) \geq (n^{-1}-n^{-2}) \sum_{k=\tau(n)}^{[\sqrt{n}]-1} B_k^2 \geq (n^{-1}-n^{-2}) \geq 1/2n.$$

Из (16) и (22) следует

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varrho_k^2 (f_0) \sin^2 (k/2n) = (1/4\pi) \int_0^{2\pi} |f(t+1/2n)-f(t)|^2\,dt \geq 1/16\,\pi\,n.$$

Откуда, если обозначить $\Sigma_{k=n}^{\infty}\, \varrho_k^2 = A_n$, будем иметь для достаточно больших n

$$1/8\pi\,n \leq \sum_{k=1}^{n} \varrho_k^2 k^2 n^{-2} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \varrho_k^2 = n^{-2} \sum_{k=1}^{n} (2k-1)\, A_k.$$

Из последнего соотношения следует $A_n = \Sigma_{k=n}^{\infty}\, \varrho_k^2 \neq o\,(1/n)$, т. е. f_0 не удовлетворяет условию (4) и тем самым условию (2). Теорема 6 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. Wiener. The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients. *Mass. J. Math.*, **3**, 1924, 72—94.
2. Н. К. Бари. Тригонометрические ряды. Москва, 1961.
3. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды, т. 1. Москва, 1965.
4. L. Fejer. Über die Bestimmung des Sprunges der Funktion aus ihrer Fourierreihe. *J. reinen. angew. Math.*, **142**, 1913, 165—188.
5. S. Sidon. Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion von beschränkter Schwankung. *Acta Sci. Math. Szeged*, **2**, 1924, 43—46.
6. С. М. Лозинский. Об одной теореме Винера. *Доклады АН СССР*, **49**, 1945, № 8, 562—565.
7. С. М. Лозинский. Об одной теореме Винера. *Доклады АН СССР*, **53**, 1946, № 8, 691—694.
8. Б. И. Голубов. О непрерывных функциях ограниченной p-вариации. *Матем. заметки* 1, 1967, № 3, 305—312.
9. Б. И. Голубов. О функциях ограниченной p-вариации. *Известия АН СССР, сер. матем.*, 32, 1968, № 4, 837—858.
10. Б. И. Голубов. О критериях непрерывности функций ограниченной p-вариации. *Сибирск. матем. ж.*, 13, 1972, № 5, 1002—1015.
11. Б. И. Голубов. Асимптотика L_p-норм продифференцированных сумм Фурье функций ограниченной вариации. *Известия АН СССР, сер. матем.*, 37, 1973, № 2, 399—421.
12. З. А. Чантурия. Модуль изменения функции и её применения в теории рядов Фурье. *Доклады АН СССР*, **214**, 1974, № 1, 63—66.
13. З. А. Чантурия. Модуль изменения функции и непрерывность. *Сообщения АН Гр. ССР*, **80**, 1975, № 2, 281—283.
14. L. Young. General inequalities for Stieltjes integrals and the convergence of Fourier series. *Math. Ann.*, **115**, 1938, No. 4, 581—612.
15. R. Lagrange. Sur les oscillations d'ordre supérieur d'une fonction numérique. *Ann. scient. Ec. Norm. Sup*, **82**, 1965, 101—130.
16. В. А. Попов. On the connection between rational and spline approximation. *Доклады БАН*, **27**, 1974, № 5, 623—626.
17. Г. Г. Харди, Дж. Литтльвуд, Г. Полия. Неравенства. Москва, 1948.

18. L. Young. An inequality of the Holder type, connected with Stieltjes integration. *Acta Math.*, **67**, 1936, 251—282.
19. З. А. Чантурия. Об абсолютной сходимости рядов Фурье. *Матем. заметки*, **18**, 1975, № 2, 185—192.
20. О. Д. Церетели. Метрические свойства функций с ограниченным изменением. *Труды Тбилисск. матем. ин-та*, **26**, 1959, 23—64.
21. О. Д. Церетели. Об индикатриссе Банаха и некоторых её применениях. *Сообщения АН Гр. ССР*, **15**, 1960, № 2, 129—136.
22. П. Л Ульянов. Вложение некоторых классов функций H_p^ω. *Известия АН СССР, сер. матем.*, **32**, 1968, № 3, 649—686.
23. А. М. Тиман. Теория приближения функций действительного переменного. Москва, 1959.

Тбилисский государственный университет.
Институт прикладной математики
Тбилиси СССР

Получено 19. 9. 1977