КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'77
София . 1980, с. 191—194

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'77
Sofia . 1980, p. 191—194

О k-Х МОДУЛЯХ НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО И КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

И. А. Шевчук

Резюме. 1. Для допустимого континуума $\mathfrak{M}$ через $D_{p,n}(\zeta, z)$ обозначим многочленные ядра В. К. Дзядыка вида $D_{p,n}(\zeta, z)=\sum_{s=0}^{n}\alpha_s(\zeta)z^s$ $(\alpha_s(\zeta)=\alpha_s(\zeta, p)$, где $p>0$ — фиксированный параметр), которые, как известно, хорошо приближают ядро Коши. Для ядер $D_{p,n}(\zeta, z)$ при всех $i=0, 1, \ldots, p$ и $j=0, 1 \ldots$ доказано соотношение

$$(1)\qquad (2\pi i)^{-1}(j\,!)^{-1}\int_{\partial\mathfrak{M}}(\zeta-z)^{i}\frac{\partial^{j}}{\partial z^{j}}D_{p,n}(\zeta, z)d\zeta=\delta_{i,j}+n^{i-p}\beta_{i,j}(z),$$

где $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера, $|\beta_{ij}(z)|$ c, постоянная c не зависит от n. При $j>i$ $\beta_{i,j}=0$. С помощью (1) получена прямая теорема, содержащая в качестве частного случая прямую теорему об одновременном приближении, прямую теорему о приближении внутри множества и пр. для k-го модуля непрерывности.

2. Отправляясь от функции $\varphi(t)$ типа k-го модуля непрерывности строится функция

$$F(x)=x\int_{x}^{1}\varphi(t)t^{-2}(1-xt^{-1})^{k-2}dt.$$

С помощью функции $F(x)$ строятся примеры функций, доказывающие необходимость достаточных условий для равенства или включения различных классов функций, которые характеризуются модулями непрерывности порядка $k\geq 2$.

1. В [1, теорема 1] установлено, что теорема Дзядыка (см., например, [2, теорема 2]) остается верной, если гладкость функций характеризовать модулем непрерывности порядка $k>2$.

Здесь решается задача: обобщить теорему 1 из [1] на случай одновременного приближения функции и ее производных, а также на случай, когда скорость приближения оценивается не только в точках границы множества, но и во внутренних точках множества; или, другими словами — обобщить теорему 3 из [2], а также теорему 1 (применительно к классу множеств $\overset{*}{B}_k$) из [2] и соответствующий результат из [3] на случай $k>2$.

Сформулируем полученное утверждение. Для этого воспользуемся обозначениями из [1]. Через $\mathfrak{N}$ обозначим множество типа $\overset{*}{B}_k$ (см. [2], определение 1 в)).

Теорема 1. *Если функция* $f(z)\in D^r H^{\varphi(t)}_{k,\mathfrak{N}}$, *то найдется последовательность многочленов* $P_n(z)$ *степени не выше* n *таких, что для любого фиксированного* $m\geqq 0$ *при всех* n, $z\in\mathfrak{N}$ *и* $j=0, 1, \ldots, r$ *имеют место неравенства*

$$|f^{(j)}(z)-P_n^{(j)}(z)|\leqq c\varrho_{1+1/n}^{r-j}(z^*)\varphi[\varrho_{1+1/n}(z^*)][\varrho_{1+1/n}(z^*)/(|z-z^*|+\varrho_{1+1/n}(z^*))]^m,$$

где $z^*\in\partial\mathfrak{N}$ — *ближайшая к точке* z *среди точек* $\xi\in\partial\mathfrak{N}$, $\varrho_{1+1/n}(z^*)$ — *расстояние от точки* z^* *до* n*-й линии уровня множества* $\mathfrak{N}$; c — *постоянная, которая не зависит от* n *и* z.

Следуя [2, с. 165], через $K_{r,m,k,n}(\xi, z)$ обозначим многочленные ядра В. К. Дзядыка, которые предназначены для хорошего приближения ядра Коши $K(\xi, z)=(\xi-z)^{-1}$. Для доказательства теоремы 1, помимо известных рассуждений понадобились новые свойства ядер $K_{r,m,k,n}(\xi, z)$. Точнее, с помощью п. п. 3) и 4) теоремы о приближении ядра Коши из [2] и леммы 2 из [1] установлена.

Лемма 1. *Пусть* $\mathfrak{M}$ — *допустимый континуум,* $K_{r,m,k,n}(\xi, z)$ — *многочленное ядро В. К. Дзядыка, построенное, отправляясь от* $\mathfrak{M}$. *При всех* $i=0, 1, \ldots, km$, $j=0, 1, \ldots$ *и* $z\in\mathfrak{M}$ *справедливо соотношение*

$$(2\pi i)^{-1}(j!)^{-1}\int\limits_{\partial\mathfrak{M}}(\xi-z)^i\frac{\partial^j}{\partial z^j}K_{r,m,k,n}(\xi, z)d\xi=\delta_{i,j}+n^{i-km}\beta_{i,j}(z),$$

де $\delta_{i,j}$ — *символ Кронекера,* $|\beta_{i,j}(z)|\leqq c$, *постоянная* c *не зависит от* n *и* z. *При* $j>i$ $\beta_{i,j}=0$.

2. Для всякой непрерывной на некотором промежутке $[a, b]$ функции $f=f(x)$ через $\omega_k(f, t)$ (или $\omega_k[f(x), t]$) обозначают ее модуль непрерывности порядка k.

Будем писать $\varphi\in\Phi^k$, k — натуральное, если функция $\varphi(t)$, $t\geqq 0$ является функцией типа модуля непрерывности порядка k, т. е. если $\varphi(t)$ непрерывная неубывающая функция с $\varphi(0)=0$, для которой при любых $\lambda>0$ имеет место соотношение $\varphi(\lambda t)\leqq(\lambda+1)^k\varphi(t)$.

Каждой функции $\varphi\in\Phi^k$ поставим в соответствие функцию $\varphi^*(t)=t^k\sup\{\varphi(u)u^{-k}: u\geqq t\}$. Хорошо известно, что $\varphi^*\in\Phi^k$, причем, очевидно, $\varphi^*(t_1)t_1^{-k}\geqq\varphi^*(t_2)t_2^{-k}$ при $0<t_1\leqq t_2$ и что справедливо соотношение $\varphi^*(t)\asymp\varphi(t)$.

Здесь и далее запись $g_1\asymp g_2$ и соответственно $g_1\leqq g_2$, где g_1 и g_2 — некоторые функции переменных t, h, n, x означает, что $A_1g_1\leqq g_2\leqq A_2g_1$ и соответственно $g_1\leqq A_3g_2$, где положительные постоянные A_1, A_2, A_3 не зависят от переменных t, h, n, x.

Определение. *Для всякой функции* $\varphi\in\Phi^k$ *через* $F_k(\varphi, x)$, $k\geqq 2$ *обозначим следующую непрерывную на* $[0, 1]$ *функцию:*

$$F_k(\varphi, x)=\begin{cases} x\int\limits_x^1 t^{-2}\varphi^*(t)(1-x/t)^{k-2}dt & \text{при}\quad x\in(0, 1] \\ 0 & \text{при}\quad x=0. \end{cases}$$

Теорема 2. *Для всякой функции* $\varphi\in\Phi^k$, $k\geqq 2$, *имеют место соотношения*

$$\omega_k[\bar{F}_k(\varphi, x), t] = |\Delta_t^k[F_k(\varphi, x), 0]| = kt \int_0^t \ldots \int_0^t (t+s)^{-k}\varphi^*(t+s)\,ds_1 \ldots ds_{k-1} \asymp \varphi(t),$$

где $s = s_1 + s_2 + \ldots + s_{k-1}$.

Доказательство теоремы 2 имеется в [4].

Как видно из теоремы, функции $F_k(\varphi, x)$ составляют довольно обширный класс непрерывных функций, для которых точно вычисляется их модуль непрерывности порядка k. Кроме того, с помощью функций $F_k(\varphi, x)$ нетрудно строить примеры функций, доказывающих необходимость достаточных условий для равенства или вложения различных классов функций, которые храктеризуются модулями непрерывности порядка $k \geqq 2$.

Соответствующие задачи впервые рассматривались Н. К. Бари, С. М. Лозинским, С. Б. Стечкиным [5]. Для их решения Н. К. Бари, С. Б. Стечкиным, а также В. Э. Гэйтом [6] были построены функции в виде тригонометрических рядов, т. е. в виде, отличающемся от функций $F_k(\varphi, x)$.

1. Н. К. Бари и С. Б. Стечкин [5] поставили и решили (при участии В. Э. Гейта [6]) задачу: доказать, что при всякой функции $\varphi \in \Phi^k$ существует функция $F(x) = F_k(\varphi, x)$, одновременно удовлетворяющая условиям:

$$\omega_k[\bar{F}_k(\varphi, x), t] \asymp \varphi(t) \text{ и } \omega_k[\tilde{F}_k(\varphi, x), t] \gtrsim \int_0^t u^{-1}\varphi(u)\,du + t^k \int_t^1 u^{-k-1}\varphi(u)\,du,$$

где $\tilde{F}_k(\varphi, x)$ — функция, тригонометрически сопряженная с $\bar{F}_k(\varphi, x)$.

Оказывается [4], что в качестве искомой функции $\bar{F}_k(\varphi, x)$ можно взять также функцию $F_k(\varphi, x)$ (надлежащим образом продолженную с отрезка $[0, 1]$ на период $[-\pi, \pi]$).

2. Аналогично, отправляясь от функции $F_k(\varphi, x)$, можно построить периодические функции $\mathring{F}_k(\varphi, x)$ такие, что $E_n[\mathring{F}_k(\varphi, x)] \lesssim n^{-r}\varphi(1/n)$, но $\omega_k[\mathring{F}_k^{(r)}(\varphi, x), t] \geqq (r-1)\int_0^t u^{-1}\varphi(u)\,du + t^k \int_t^1 u^{-k-1}\varphi(u)\,du$, где $r \geqq 0$ — целое, $E_n[\mathring{F}_k(\varphi, x)]$ — величина наилучшего приближения функции $\mathring{F}_k(\varphi, x)$ тригонометрическими полиномами степени n, т. е. получить результат С. М. Лозинского [7].

3. Вопросы, подобные примерам 1. и 2., решаются для классов функций, заданных в областях комплексной плоскости с кусочно-гладкой границей. Случай $k = 2$ см., например, в [8].

4. Если $\varphi(t) = t^r\bar{\varphi}(t)$, где $\bar{\varphi}(t) \in \Phi^{k-r}$, $0 < r < k$, то $\omega_{k-r}[F_k^{(r)}(\varphi, x), t] \gtrsim \int_0^t s^{-1}\bar{\varphi}(s)\,ds$, т. е. условие $\bar{\varphi}(t) \gtrsim \int_0^t s^{-1}\bar{\varphi}(s)\,ds$ является необходимым и достаточным для равенства классов (достаточность см. в [9]):

$$H_k^{\varphi(t)} = W^r H_{k-r}^{\bar{\varphi}(t)}, \quad \text{где} \quad \varphi(t) = t^r\bar{\varphi}(t).$$

5. При всех $r = 1, 2, \ldots, k-1$ для каждой функции $\varphi \in \Phi^k$ имеет место неравенство $\omega_r[F_k(\varphi, x), t] \gtrsim t^{r-1}\int_t^1 u^{-r}\varphi(u)\,du$, которое показывает, что лемма Маршу точная по порядку.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. А. Шевчук. О классах функций $H^{\varphi(t)}_{k\mathfrak{M}}$ на множествах комплексной плоскости. Труды Международной конференции по теории приближения функций. Москва, 1977, 409—412.
2. В. К. Дзядык. О конструктивной теории функций на замкнутых множествах комплексной плоскости. Труды Международной конференции по теории приближения функций. Москва, 1977, 157—172.
3. Н. А. Широков. О равномерном приближени функций на замкнутых множествах, имеющих конечное число угловых точек с ненулевыми внешними углами. *Доклады АН СССР*, 205, 1972, № 4, 798—800.
4. И. А. Шевчук. Некоторые замечания о функциях типа модуля непрерывности порядка $k \geqq 2$. Вопросы теории приближений функций и ее приложений. Киев, 1976, 194—199.
5. Н. К. Бари, С. Б. Стечкин. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций. *Тр. Моск. матем. об-ва*, 5, 1956, 483—522.
6. В. Э. Гейт. Теоремы вложения для некоторых классов периодических функций. *Известия ВУЗ, Математика*, 172, № 4, 67—74.
7. С. М. Лозинский. Обращение теорем Джексона. *Доклады АН СССР*, 83, 1952, 645—647.
8. И. А. Шевчук. О тереме Племеля-Привалова и конструктивной характеристике функций классов Зигмунда. (Препринт. Изд. Ин та математики АН УССР, № 3). Киев, 1972.
9. Ю. А. Брудный. О локальном наилучш м приближении функций многочленами. *Доклады АН СССР*, 161, 1965, № 4, 746—749.

Институт математики АН СССР
Киев *Получено 10. 10. 1977.*