КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'77
София . 1980, с. 195—203

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'77
Sofia . 1980, p. 195—203

THEOREMES TAUBERIENS POUR LES TRANSFORMES DE LA PLACE A PLUSIEURES VARIABLES

L. Alpár

A la mémoire de Paul Turán

Résumé. On suppose que pour $x>0$, $y>0$

$$F(x,y)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-xu-yv}da(u,v)<\infty,$$

$a(u, v)$ étant une fonction additive non-négative de rectangle. Lorsque le point (x, y) tend vers l'origine sur une courbe continue arbitraire ayant pour tangente en $(0, 0)$ une droite différente des axes de coordonnées, le comportement asymptotique de $F(x, y)$ est caractérisé au moyen des fonctions modèles $\Phi_k^{-1}(x, y) (k=0, \ldots 4)$ tel que l'on ait

$$\lim \Phi_k(x, y)F(x, y)=1 \text{ où}$$

$$\Phi_0^{-1}(x, y)=(xy)^{-1};\quad \Phi_1^{-1}(x, y)=x^{-1}+y^{-1};\quad \Phi_2^{-1}(x, y)=(x+y)^{-1};$$

$$\Phi_3^{-1}(x, y)=x^{-1}+(x+y)^{-1};\quad \Phi_4^{-1}(x, y)=x^{-1}(x+y)^{-1}.$$

Soit ensuite $\overline{L}$ la fermeture de l'ensemble ouvert L mesurable au sens de Jordan et, pour $\lambda>0$, désigne $\overline{L}_\lambda$ l'ensemble obtenu de $\overline{L}$ par une homothétie de rappors λ et de centre à l'origine. On met de plus

$$\Lambda_{jk}(\overline{L})=\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-j} \iint_{(u,v)\in \overline{L}_\lambda} da(u, v)$$

où k évoque l'indice de Φ_k.

Alors on a:

$$\Lambda_{20}(\overline{L})=|L|$$

où $|L|$ est la mesure de $\overline{L}$;

$$\Lambda_{11}(\overline{L})=|M|+|N|$$

où $\overline{M}=Ou\cap\overline{L}$, $\overline{N}=Ov\cap\overline{L}$;

$$\Lambda_{12}(\overline{L})=|F|/\sqrt{2}$$

si $|\overline{G}-F|=0$ où $F=l\cap L$, $\overline{G}=l\cap\overline{L}$ et l est la bisectrice de l'angle $u\hat{O}v (u\geqq 0,\ v\geqq 0)$;

$$\Lambda_{13}(\overline{L})=|M|+|F|/\sqrt{2} \quad \text{si la condition précédente est remplie};$$

$$\Lambda_{14}(\overline{L})=|\overline{L^{(u)}}|+|\overline{G^{(v)2}}|$$

où $\overline{L^{(u)}}=\overline{L}\cap\overline{uOl}$, $\overline{L^{(v)}}\ \overline{L}\cap\overline{lOv}$, $\overline{G^{(v)}}=l\cap\partial L^{(v)}$ et l'on définie $\overline{G^{(v)^2}}$ de la manière suivante: si $(\xi, \xi)\in\overline{G^{(v)}}$, alors $(\xi^2, \xi^2)\in\overline{G^{(v)^2}}$.

On peut généraliser les résultats obtenus aux cas où le nombre des variables est supérieur à deux.

1. Introduction. 1.1. — Les théorèmes Taubériens pour les séries de puissances à une variable s'obtiennent souvent comme les cas particuliers des résultats analogues concernant les transformées de Laplace d'une seule variable. La démonstration directe de ces derniers emploie fréqemment, comme un moyen usuel, l'intégration par parties d'intégrales simples [4, Ch. VII].

La situation devient très différente dans le cas de plusieures variables. Notamment l'intégration par parties même d'une intégrale double résulte déjà une expression de neuf termes dont quelques-uns sont eux aussi d'intégrales simples ou doubles [7, p. 281]. L'intégration par parties d'intégrales multiples de plus de deux variables produit de relations encore plus compliquées. Donc l'extension immédiate de cet élément de preuve aux intégrales multiples paraît d'avoir peu de chance au succès.

C'était une des raisons pour laquelle nous nous sommes occupés d'abord de théorèmes Taubériens pour les séries de puissances à plusieures variables sans nous référer aux transformées de Laplace [1, 2]. Au cours de ces investigations nous avons établi un procédé susceptible à démontrer certains théorèmes Taubériens concernant soit des séries de puissances, soit des séries de Dirichlet ou bien des transformées de Laplace à deux variables réelles, sans appliquer l'intégration par parties.

Exposer la procédure permettant la généralisation des propositions trouvées pour les séries de puissances à plusieures variables aux cas correspondants des transformées de Laplace ou des séries de Dirichlet fait l'objet de la note présente. Nous allons examiner seulement des cas de deux variables non-négatives, mais il est aisé de voir que les mêmes raisonnements s'appliquent dans bien de cas où le nombre des variables est supérieur à deux.

1.2. Le point de départ de nos recherches est un problème soulevé et résolu par P. Turán [5, 6] et qui s'énonce comme suit.

Théorème A. *Soit la série*

$$f(x, y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}x^m y^n, \qquad a_{mn}\geqq 0$$

convergente dans le carré $Q=\{(x, y): 0\leqq x<1,\ 0\leqq y<1\}$ *et supposons que, si le point* (x, y) *s'approche du point* $(1, 1)$ *sur une courbe continue arbitraire de* Q, *on a*

$$\lim f(x, y)\ (1-x)(1-y)=1.$$

De plus, soit $\overline{L}$ *un ensemble fermé et mesurable au sens de Jordan* *dans le premier quadrant du plan et, pour $\lambda > 0$, désigne $\bar{L}_\lambda$ l'ensemble de points obtenus de $\bar{L}$ par une homothétie de rapport λ et de centre à l'origine. Alors*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-2} \sum_{(m,n)\in \bar{L}_\lambda} a_{mn} = |L| \tag{1.1}$$

où $|L|$ est la mesure de $\bar{L}$.

Nous avons acquis d'autres résultats du même genre ([1, 2]) en remplaçant l'égalité asymptotique $f(x, y) \sim 1/(1-x)(1-y) = 1/\varphi_0(x, y)$ par les suivantes:

$$\begin{aligned}
&f(x, y) \sim 1/(1-x) + 1/(1-y) = 1/\varphi_1(x, y),\\
&f(x, y) \sim 1/(1-xy) = 1/\varphi_2(x, y),\\
&f(x, y) \sim 1/(1-x) + 1/(1-xy) = 1/\varphi_3(x, y),\\
&f(x, y) \sim 1/(1-x)(1-xy) = 1/\varphi_4(x, y)
\end{aligned} \tag{1.2}$$

où le point (x, y) tend vers le point $(1,1)$ sur une courbe continue de Q. Nous avons appelé $\varphi_0^{-1}, \ldots, \varphi_4^{-1}$ fonctions modèles de f.

Le fait que $x \to 1-0$, $y \to 1-0$ est exprimé en écrivant $x \sim e^{-1/r\lambda}$, $y \sim e^{-1/s\lambda}$ où r et s sont de nombres arbitraires finis et positifs, fixés cas pour cas et $\lambda \to \infty$. De cette façon on ne tient compte que des courbes continues de Q ayant de tangentes non parallèles aux axes de coordonnées au point $(1,1)$.

1.3. *Quelques notations et définitions.* a) Dans ce travail ne figurent que d'ensembles d'une ou de deux dimensions, mesurables au sens de Jordan, situés dans le premier quadrant du plan réel (u, v), noté $\mathbf{R}_+^2 = \mathbf{R}_+^2(u, v) = \{(u, v) : u \geqq 0,\ v \geqq 0\}$. Si E est un tel ensemble ouvert, on dénote par $\bar{E}$ sa fermeture, par ∂E sa frontière (d'une dimension au plus) et par $|E|$ sa mesure de Jordan d'une ou de deux dimensions suivant le cas.

b) $\bar{L}$ joue encore le même rôle que dans le Théorème A, mais il est soumis à présent à certaines stipulations complémentaires introduites déjà dans [1] et [2]. Elles étaient imposées à $\bar{L}$ puisque l'étude des problèmes qui portent sur les fonctions modèles $\varphi_1^{-1}, \ldots, \varphi_4^{-1}$ est moins simple que celle du Théorème A avec φ_0^{-1}. Elles sont également indispensables dans les investigations ci-après. Les restrictions additionnelles sont les suivantes:

(i) L est toujours ouvert et de deux dimensions, donc $\bar{L} = L \cup \partial L$ est la fermeture d'ensemble ouvert;

(ii) tous les points intérieurs de $\bar{L}$ appartiennent à L, c'est que ∂L ne contient pas de sous-ensemble formé de points intérieurs de $\bar{L}$, en particulier ∂L ne comprend aucune coupure de $\bar{L}$;

(iii) $\bar{L}$ n'est pas nécessairement connexe, mais chaque composente $\bar{L}^{(i)}$ de $\bar{L}$ remplit la condition: $|L^{(i)}| > 0$.

c) Les ensembles $\bar{L}_\lambda$ sont définis tels que dans le Théorème A, ils jouissent donc des mêmes propriétés que $\bar{L}$. Nous faisons remarquer encore que dans [1], [2], nous avons défini $\bar{L}_\lambda$ d'une manière plus générale que plus haut. Cependant nous nous contentons maintenant de cette définition plus simple pour éviter les explications plus amples.

d) $p \geqq 0$, $q \geqq 0$ désignent toujours des entiers.

2. Description du procédé. 2.1. — Soit $a(u, v)$ une fonction additive non-négative de rectangle définie dans $\mathbf{R}^2_+(u, v)$. Cela veut dire que, pour $0 \leqq u_1 \leqq u_2$, $0 \leqq v_1 \leqq v_2$, on a

$$(2.1) \qquad a(u_2, v_2) - a(u_2, v_1) - a(u_1, v_2) + a(u_1, v_1) \geqq 0.$$

Nous admettons de plus que, pour $x > 0$, $y > 0$, nous avons

$$(2.2) \qquad F(x, y) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-xu-yv} da(u, v) < \infty.$$

Nous allons étudier le comportement asymptotique de la fonction non-négative $F(x, y)$ lorsque le point (x, y) tend vers l'origine sur une courbe continue quelconque du premier quadrant du plan (x, y) ayant pour tangente à l'origine une droite différente des axes de coordonnées de l'équation: $rx = sy$ où r et s sont de nombres finis et positifs, fixés pour chaque courbe. Le fait que $x \to 0+$, $y \to 0+$ soit noté par $x \sim 1/r\lambda$, $y \sim 1/s\lambda$ où $\lambda \to \infty$.

L'allure asymptotique de $F(x, y)$ est caractérisée à nouveau par les fonctions modèles. Nous disons que $1/\Phi_k(x, y)$ est une fonction modèle de $F(x, y)$, si $\Phi_k(x, y) \to 0$ lorsque $x \to 0+$, $y \to 0+$ et

$$(2.3) \qquad \underset{x \sim 1/r\lambda,\ y \sim 1/s\lambda}{F(x, y) \sim 1/\Phi_k(x, y)} \quad \text{ou} \quad \lim_{\lambda \to \infty} \Phi_k(x, y) F(x, y) = 1$$

quand (x, y) se rapproche de l'origine sur n'importe quelle courbe envisagée. Nous allons examiner en particulier les cas où

$$(2.4) \qquad \begin{aligned} &1/\Phi_0(x, y) = 1/xy; \quad 1/\Phi_1(x, y) = 1/x + 1/y; \quad 1/\Phi_2(x, y) = 1/(x+y); \\ &1/\Phi_3(x, y) = 1/x + 1/(x+y); \quad 1/\Phi_4(x, y) = 1/x(x+y). \end{aligned}$$

Les relations qui existent entre les fonctions φ_k et Φ_k sont facile à comprendre. Les fonctions modèles indiquées sous (1.2) et (2.4) ne sont pas choisies au hasard; tout au contraire elles représentent les types fondamentaux dans le cas de deux variables réelles, de même que $(1-x)^{-1}$, resp. x^{-1} sont les fonctions modèles fondamentales pour les séries de puissances, resp. pour les séries de Dirichlet ou les transformées de Laplace à une variable réelle. Dans la note [3] nous avons considéré d'autres variantes des fonctions modèles que celles qui sont signalées sous (1.2). Ajoutons encore qu'en augmentant le nombre des variables celui des fonctions modèles fondamentales se multiplie également. C'est pourquoi les théorèmes Taubériens que nous allons prouver dans le cas de deux variables s'étendent en général aux cas de plus de deux variables, mais on n'épuise pas ainsi toutes les possibilités et il faut tenir compte de fonctions modèles fondamentales qui n'ont pas d'analogues dans le cas de deux variables, d'où de problèmes nouveaux surgissent.

La manière dont le point (x, y) doit s'approcher de l'origine et la relation (2.3) constituent nos conditions Taubériens. Les théorèmes Taubériens qui en résultent s'expriment sous la forme:

$$(2.5)\qquad \Lambda_{jk}(\bar{L})=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{-j}\iint_{(u,\,v)\in\bar{L}_\lambda} da(u, v);\quad j=1, 2,$$

où $\Lambda_{jk}(\bar{L})$ est une fonction d'ensemble complètement additive si la limite dans (2.5) existe pour une $a(u, v)$ et pour tous les $\bar{L}$ admis. Les indices j et k évoquent Φ_k^{-1} ayant le degré asymptotique j quand $\lambda\to\infty$. On verra que Φ_k^{-1} une fois donnée, $\Lambda_{jk}(\bar{L})$ admet la même valeur pour une famille d'ensembles $\bar{L}$ de propriétés énumérées dans 1.3. et remplissant certaines conditions qui dépendent uniquement de Φ_k^{-1}. $\Lambda_{jk}(\bar{L})$ prend aussi la même valeur pour tous les $a(u, v)$ qui satisfont à (2.3) avec une Φ_k^{-1} fixée et avec un $\bar{L}$ appartenant à la famille d'ensembles que nous venons de mentionnée.

2.2. Il résulte de (2.3) et (2.4) que, pour r et s fixés,

$$(2.6)\qquad \lim_{\lambda\to\infty}\Phi_k[(p+1)x, (q+1)y]F[(p+1)x, (q+1)y]=1$$

et que

$$(2.7)\qquad \lim_{\lambda\to\infty}\Phi_k(x, y)/\Phi_k[(p+1)x, (q+1)y]=R_k(r, s; p, q)=R_k$$

où

$$R_0=\frac{1}{(p+1)(q+1)};\quad R_1=(r+s)^{-1}\left(\frac{r}{p+1}+\frac{s}{q+1}\right);$$

$$(2.8)\qquad R_2=\frac{r+s}{sp+rq+r+s};\quad R_3=\frac{r+s}{r+2s}\left(\frac{1}{p+1}+\frac{s}{sp+rq+r+s}\right);$$

$$R_4=(r+s)/(p+1)(sp+rq+r+s).$$

Il découle de (2.6) et (2.7) que

$$(2.9)\qquad \begin{aligned}&\lim_{\lambda\to\infty}\Phi_k(x, y)F[(p+1)x, (q+1)y]\\ &=\lim_{\lambda\to\infty}\Phi_k(x, y)\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty e^{-xu-yv}e^{-pxu-qyv}\,da(u, v)=R_k.\end{aligned}$$

Soit ensuite $g(\xi, \eta)$ un polynome non-négatif sur le carré unité fermé, noté encore par $\bar{Q}$. Alors, en posant $\xi=e^{-xu}$, $\eta=e^{-yv}$, on peut tirer de (2.9) que

$$(2.10)\qquad \begin{aligned}&\lim_{\lambda\to\infty}\Phi_k(x, y)\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty e^{-xu-yv}g(e^{-xu}, e^{-yv})\,da(u, v)\\ &=\sum_{p,q}c_{pq}R_k(r, s; p, q)=\mathfrak{F}_k^{(r,\,s)}[g]\end{aligned}$$

où les c_{pq} sont les coefficients de g.

Quant au sens de la transformation $\mathfrak{F}_k^{(r,s)}$, il est facile à vérifier qu'elle est linéaire et que, pour r et s fixés, elle se réduit à une fonctionnelle linéaire dans l'espace normé des polynomes non-négatifs dans $\bar{Q}$. En effet,

$\mathcal{F}_k^{(r,s)}$ fait correspondre à chaque élément g de cet espace une fonction rationnelle: $\Sigma c_{pq} R_k$ qui est aussi continue pour les valeurs considérées de ses variables et qui se réduit à un nombre quand r et s sont fixés. Puis il résulte déjà de la définition de $\mathcal{F}_k^{(r,s)}$ qu'elle est additive et homogène. Nous avons enfin, pour un élément g de l'espace, en vertu du (2.3),

$$0 \leqq \mathcal{F}_k^{(r,s)}[g] \leqq \{\lim_{\lambda\to\infty} \Phi_k(x, y) F(x, y)\} \max_{(\xi,\eta)\in\overline{Q}} g(\xi, \eta) = \max_{(\xi,\eta)\in\overline{Q}} g(\xi, \eta)$$

d'où, en mettant $g \equiv 1$, on obtient que $\|\mathcal{F}_k^{(r,s)}\| = 1$.

Cependanf l'espace des polynomes sus-mentionné est un sous-espace de l'espace des fonctions continues et non-négatives dans $\overline{Q}$. Ainsi, d'après le théorème de Hahn-Banach, on peut prolonger la fonctionnelle $\mathcal{F}_k^{(r,s)}$ dans cet espace plus large sans que sa norme soit changée. $\mathcal{F}_k^{(r,s)}$ est donc une fonctionnelle linéaire positive dans l'espace des fonctions continues dans $\overline{Q}$ et, selon le théorème de F. Riesz, elle peut être mise sous la forme d'intégrale. Nous aurons à chercher par la suite cette expression intégrale de $\mathcal{F}_k^{(r,s)}$. De plus, grâce au même théorème de F. Riesz, $\mathcal{F}_k^{(r,s)}$ est prolongeable dans un espace encore plus large, dans celui des fonctions qui sont les limites des suites de fonctions continues croissantes et bornées dans $\overline{Q}$. Ces fonctions limites ne sont pas nécessairement continues.

Ce dernier espace contient la fonction

$$w(\xi, \eta) = 1/\xi\eta \quad \text{pour} \quad e^{-1} \leqq \xi \leqq 1, \quad e^{-1} \leqq \eta \leqq 1, \tag{2.11}$$

autrement $w(\xi, \eta) = 0$. Si l'on met encore $\xi = e^{-xu}$, $\eta = e^{-yv}$ et $x = 1/r\lambda$, $y = 1/s\lambda$, il vient de (2.11) que $w(e^{-xu}, e^{-yv}) = 0$ pour $u > r\lambda$, $v > s\lambda$. Or, selon le théorème cité de Riesz, la relation (2.10) a lieu même si l'on y remplace $g(e^{-xu}, e^{-yv})$ par $w(e^{-xu}, e^{-yv})$, ce qui donne

$$\lim_{\lambda\to\infty} \Phi_k(x, y) \int_0^{r\lambda}\int_0^{s\lambda} da(u, v) = \mathcal{F}_k^{(r,s)}[w]. \tag{2.12}$$

Nous savons, d'autre part, que, pour $x \sim 1/r\lambda$, $y \sim 1/s\lambda$ on a

$$\begin{gathered} \Phi_0(x, y) \sim \lambda^{-2}(rs)^{-1}; \quad \Phi_1(x, y) \sim \lambda^{-1}(r+s)^{-1}; \quad \Phi_2(x, y) \sim \lambda^{-1}(r+s)/rs; \\ \Phi_3(x, y) \sim \lambda^{-1}(r+s)/r(r+2s); \quad \Phi_4(x, y) \sim \lambda^{-2}(r+s)/r^2 s, \end{gathered} \tag{2.13}$$

ou en général

$$\Phi_k(x, y) \sim \lambda^{-j} \psi_k(r, s) \quad (j = 1, 2), \tag{2.14}$$

$\psi_k(r, s)$ étant une fonction rationnelle de r et s pour $k = 0, \ldots, 4$. La comparaison de (2.12) et de (2.14) conduit à l'expression

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-j} \int_0^{r\lambda}\int_0^{s\lambda} da(u, v) = \mathcal{F}_k^{(r,s)}[w]/\psi_k(r, s). \tag{2.15}$$

Dès lors on peut mettre en valeur les résultats acquis pour les séries de puissances. Notamment nous avons vérifié que, pour $x \sim e^{-1/r\lambda}$, $y \sim e^{-1/s\lambda}$, on a

$$\varphi_k(x, y) \sim \lambda^{-j} \psi_k(r, s) \quad (j = 1, 2) \tag{2.16}$$

où les fonctions $\psi_k(r, s)$ sont identiques à celles de (2.13) ou de (2.14). Il est clair en outre que, sous les conditions précédentes

$$(2.17)\qquad \lim_{\lambda\to\infty} \varphi_k(x, y)/\varphi_k(x^{p+1}, y^{q+1}) = R_k(r, s; p, q)$$

avec les mêmes fonctions R_k qui figurent dans (2.8).

Ces circonstances mettent en évidence que le membre droit de (2.15) ne change pas si l'on remplace dans son membre gauche l'intégrale double par la somme double de l'expression

$$(2.18)\qquad \lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-j} \sum_{m\leq r\lambda} \sum_{n\leq s\lambda} a_{mn};\quad j=1, 2$$

considérée tout d'abord ou par la somme double de la formule

$$(2.19)\qquad \lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-j} \sum_{\mu_m\leq r\lambda} \sum_{\nu_n\leq s\lambda} a^*_{mn};\quad j=1, 2.$$

Elles interviennent en étudiant les séries de puissances, resp. de Dirichlet:

$$f(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} x^m y^n;\quad f^*(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a^*_{mn} e^{-\mu_m x - \nu_n y}$$

ayant φ_k^{-1}, resp. φ_k^{-1} comme fonction modèle. Les limites (2.18) et (2.19) sont égales avec le membre droit de (2.15) qui est, pour chaque k, invariablement la même fonction rationnelle de r et s s'agit il de $F(x, y)$, de $f^*(x, y)$ ou de $f(x, y)$.

Par conséquent il ne nous reste qu'à exprimer $\mathcal{F}_k^{(r,s)}$ sous la forme d'intégrale, à déterminer $\mathcal{F}_k^{(r,s)}[w]$ et à tirer des conclusions adéquates, séparément pour chaque k, des relations ainsi obtenues. Or, ces problèmes ont été discutés et résolus pour les séries de puissances dans les notes [1, 2] et, comme nous venons de faire remarquer, les résultats trouvés fournissent les solutions cherchées aussi bien pour les séries de Dirichlet que pour les transformées de Laplace.

Nous pouvons donc formuler nos propositions sans réitérer les raisonnements qui viennent d'être indiqués. Nous les détaillerons seulement pour les transformées de Laplace.

3. Enoncé des théorèmes. Nous supposons que dans ce § $x\sim 1/r\lambda$, $y\sim 1/s\lambda$, $\lambda\to\infty$ et que les relations (2.1) et (2.2) ont lieu.

Théorème A. — *Admettons que*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \Phi_0(x, y)\, F(x, y) = \lim_{\lambda\to\infty} xy\, F(x, y) = 1.$$

Alors $A_{20}(\bar{L}) = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-2} \iint_{(u,v)\in \bar{L}_\lambda} da(u, v) = |L|.$

Observons que la valeur de cette limite ne dépend que de $|L|$, c'est que les valeurs de $a(u, v)$ ont une distribution uniforme. On voit qu'on peut déplacer, déformer, décomposer ou recomposer $\bar{L}$ d'une manière arbitraire à condition que $|L|$ reste invariable.

Théorème 1. — *Supposons que*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \Phi_1(x, y) F(x, y) = \lim_{\lambda\to\infty} (1/x + 1/y)^{-1} F(x, y) = 1$$

et posons $\bar{M} = Ou \cap \partial L$, $\bar{N} = Ov \cap \partial L$. *Alors*

$$A_{11}(\bar{L}) = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-1} \iint_{(u,v)\in \bar{L}_\lambda} da(u, v) = |M| + |N|.$$

C'est dans la preuve de ce théorème que nous exploitons déjà les conditions que $\overline{L}$ est la fermeture d'ensemble ouvert et que chaque composante de $\overline{L}$ est de mesure positive. Entre autres les composantes dont les frontières contiennent $\overline{M}$ et $\overline{N}$ jouissent de ces propriétés; dans le cas contraire cette proposition serait en défaut. D'ailleurs un sous-ensemble de $\overline{L}$ qui n'a pas une intersection de mesure positive avec les axes Ou, Ov n'influence pas la valeur de $\Lambda_{11}(\overline{L})$.

Théorème 2. — *Admettons que*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \Phi_2(x, y)F(x, y) = \lim_{\lambda\to\infty} (x+y)F(x, y) = 1$$

et notons par l *la bisectrice de l'angle* uOv *située dans* $\mathbf{R}^2_+$. *Soient encore* $F = l\cap L$, $G = l\cap\overline{L}$. *Si de plus la condition* $|\overline{G}-F| = |l\cap\partial L| = 0$ *est remplie, on a*

$$\Lambda_{12}(\overline{L}) = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-1} \iint_{(u,v)\in\overline{L}_\lambda} da(u, v) = |F|/\sqrt{2}.$$

La démonstration de cette proposition utilise également les restrictions concernant $\overline{L}$ que nous venons de mentionner, ainsi que celle que ∂L ne contient pas de coupures de $\overline{L}$.

Théorème 3. *Supposons que* $\lim_{\lambda\to\infty}\Phi_3(x, y)\,F(x, y) = \lim_{\lambda\to\infty}[1/x+1/(x+y)]^{-1}F(x, y) = 1$. *Nous avons alors, avec les notations précédentes,*

$$\Lambda_{13}(\overline{L}) = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-1} \iint_{(u,v)\in\overline{L}_\lambda} da(u, v) = |M| + |F|/\sqrt{2}.$$

Les remarques faites au sujet des Théorèmes 1 et 2 concernent aussi le Théorème 3. Nous pouvons observer en outre l'intéressant caractère additif des Théorèmes 1 et 3.

Pour formuler notre dernière proposition nous devons définir le carré d'un ensemble $H\subset l$. Si le point $(\xi, \xi)\in H$, alors le point $(\xi^2, \xi^2)\in H^2$. Il est évident que $H^2\subset l$ et que, si H est mesurable au sens de Jordan, H^2 l'est aussi. Soient ensuite

$$\overline{L}^{(u)} = \overline{L}\cap\overline{uOl}; \quad \overline{L}^{(v)} = \overline{L}\cap\overline{lOv};$$

$$\overline{G}^{(u)} = l\cap\partial L^{(u)}; \quad \overline{G}^{(v)} = l\cap\partial L^{(v)}.$$

$\overline{L}^{(u)}$ est donc l'intersection de $\overline{L}$ et de l'angle fermé $\overline{uOl}$; $\overline{L}^{(v)}$ est défini de la même façon. Ajoutons que $\overline{G}^{(u)}\cup\overline{G}^{(v)} = \overline{G}$, mais il peut arriver que $\overline{G}^{(u)}\neq\overline{G}$ et $\overline{G}^{(v)}\neq\overline{G}$.

Théorème 4. *On suppose que*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \Phi_4(x, y)\,F(x, y) = \lim_{\lambda\to\infty} x(x+y)F(x, y) = 1.$$

Alors $\Lambda_{24}(\overline{L}) = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-2} \iint_{(u,v)\in\overline{L}_\lambda} da(u, v) = |L^{(u)}| + |\overline{G}^{(v)2}|/2\sqrt{2}$,

on a même $\Lambda_{24}(\overline{L}^{(u)}) = |L^{(u)}|$; $\Lambda_{24}(\overline{L}^{(v)}) = |\overline{G}^{(v)2}|/2\sqrt{2}$.

BIBLIOGRAPHIE

1. L. Alpár. Tauber-típusú tételek többváltozós hatványsorokra, I. *Mat. Lapok*, **24**, 1973, 29—48.
2. L. Alpár. Tauberians theorems for power series of several variables I. *Colloquia Math. Soc. J. Bolyai* **19**, 1978, 51—87.
3. L. Alpár. Tauber-típusú tételek többváltozós hatványsorokra, II. *Mat. Lapok*, **24**, 1973, 255—271.
4. G. H. Hardy. Divergent Series. Oxford, 1956.
5. P. Turán. Problème 168. *Mat. Lapok*, **19**, 1968, 377.
6. P. Turán. Problème 168. *Mat. Lapok*, **21**, 1970, 165—167.
7. W. H. Young. On the multiple integration by parts and the second theorem of the mean. *Proc. London Math. Soc.* (2) **16**, 1917, 273—293.

Institut Mathématique de l'Académie des Sciences de Hongrie, Reáltanoda u. 13—15. 1053 Budapest, Hongrie

Reçu le 14 septembre 1977