КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'77
София . 1980, с. 223—230

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'77
Sofia . 1980, p. 223—230

BEMERKUNGEN ZUR CHARAKTERISIERUNG VON ABSOLUT STETIGEN FUNKTIONEN

J. Baumeister

Zusammenfassung: Sei $L_A(I)$ der Orlicz Raum auf dem Intervall $I\subset R$, definiert durch die verallgemeinerte Young-Funktion A. Für $m\in\mathbb{N}$ setzen wir:

$$L_A^m(I):=\{f\in C^{(m-1)}(I)\,|\,f^{(m-1)}\text{ absolut stetig, } f^{(m)}\in L_{(A)}(I)\}.$$

Wir geben eine Charakterisierung der Funktionen in $L_A^m(I)$ durch dividierte Differenzen; Ergebnisse für die klassischen L_p^m-Räume finden sich bei J. W. Jerome und L. L Schumaker (1973). Ferner untersuchen wir den Zusammenhang mit interpolierenden Splines und der Fortsetzung einer Funktion $F\in C(E)$, $E\subset I$, zu einer Funktion $F\in L_A^m(I)$.

1. Einleitung. Sei I eine Intervall in $\mathbb{R}$; wir setzen für $m=1, 2,\dots$: $AC^{m-1}(I)=\{f\,|\,f^{(m-1)}$ existiert und ist absolut stetig in $I\}$.

Wir definieren: $Y=\{A:\mathbb{R}\to[0,\infty)\,|\,A$ stetig, konvex, symmetrisch, $A(0)=0$, $A\not\equiv 0\}$. Für $A\in Y$ sei $A^*:\mathbb{R}\to[0,\infty]$ definiert durch $A^*(v)=\sup\{uv-A(u)\,|\,u\in\mathbb{R}\}$.

Wir setzen: $\overline{Y}=\{A:\mathbb{R}\to[0,\infty]\,|\,A=B^*,\ B\in Y\}$. Für $A\in\overline{Y}$ definieren wir der Orlicz-Raum $L_A(I)$ durch:

$$L_A(I)=\{f\,|\,f \text{ meßbar auf } I,\ \varrho_A(\alpha f)=\int_I A(\alpha f(t))\,dt<\infty \quad \text{für ein } \alpha\in\mathbb{R}\}. \tag{1.1}$$

$L_A(I)$ ist zusammen mit der Norm

$$\|f\|_A=\inf\{\alpha>0\,|\,\varrho_A(\alpha^{-1}f)\leq 1\} \tag{1.2}$$

ein Banachraum (siehe [9], [10]).
Die klassischen L_p-Räume werden definiert durch die Funktionen:

$$A_p(u)=p^{-1}|u|^p,\ 1\leq p<\infty \quad (A_p\in Y),$$

bzw.

$$A_\infty(u)=\begin{cases}0, & |u|\leq 1,\\ \infty, & |u|>1,\end{cases}\quad (A_\infty=A_1^*\in\overline{Y}).$$

Ein von den klassischen L_p-Räumen verschiedener Orliczraum wird definiert durch: $A(u)=(1+|u|)\log(1+|u|)-|u|$ $(A \in Y)$. Für $A \in \overline{Y}$ und $m \in \mathbb{N}$ definieren wir den Banachraum

$$(1.3) \qquad L_A^m(I)=\{f \in AC^{m-1}(I) \mid f^{(m)} \in L_A(I)\}$$

mit Norm $\|f\|_{A,m}=\sum_{i=1}^{m}|f(t_i)|+\|f^{(m)}\|_A$, wobei $t_1<\ldots<t_m$ Punkte in I sind.

Wir wollen zeigen, daß sich die Funktionen in $L_A^m(I)$ durch Ausdrücke in dividierten Differenzen charakterisieren lassen; Resultate für die klassischen L_p-Räume finden sich u. a. in [5] und [7].

Wie im klassischen Fall läßt sich auch hier ein Zusammenhang mit interpolierenden Splines herstellen. Daraus lassen sich hinreichende Bedingungen dafür ableiten, daß eine Funktion $F: I \to \mathbb{R}$ in $L_A^m(I)$ liegt. Unmittelbar damit zusammenhängt die Frage, wann sich ein Funktion $F \in C(E)$, $E \subset I$, zu einer Funktion $f \in L_A^m(I)$ fortsetzen läßt.

2. Charakterisierung von Funktionen in $L_A^m(I)$. Wie man aus der Betrachtung von $L_p^m(I)=L_{A_p}^m(I)$, $1 \leq p \leq \infty$, weiß, hat man bei der Charakterisierung von Funktionen in $L_p^m(I)$ die beiden Fälle $1<p\leq\infty$ und $p=1$ getrennt zu behandeln (siehe [8]).

n unserer Allgemeinheit haben wir die Fälle $A \in Y_a=\{A \in \overline{Y} \mid A^* \in Y\}$ und $A \in Y_s=\overline{Y}\setminus Y_a$ zu unterscheiden; die entscheidende Aussage ist:

$$(2.1) \qquad \lim_{\mu(E)\to 0}\|X_E\|_{A^*}=\lim_{\mu(E)\to 0}(A^{*-1}(\mu(E)^{-1}))^{-1}=0,$$

falls $A \in Y_a$, wobei μ das Lebesgue-Maß and X_E die charakteristische Funktion einer meßbaren Menge $E \subset I$ ist. Die Eigenschaft (2.1) ist die absolute Stetigkeit der Norm in L_{A^*} (siehe [10], S. 53 ff); sie ist nicht notwendigerweise erfüllt für $A \in Y_s$ (Beispiel A_∞).

Wir bezeichnen mit $F[\xi_0,\ldots,\xi]$ die dividierten Differenzen einer Funktion F zur Zerlegung $\xi_0 \leq \ldots \leq \xi$.

S a t z 1: *Sei $A \in Y_a$ und $F: I \to \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:*

a) $F \in L_A^m(I)$

b) $\left(\sum_{i=0}^{n-m} A(\alpha F[x_i,\ldots,x_{i+m}])(x_{i+m}-x_i) \leq 1\right);$

$$\forall \alpha>0,\ x_i \in I,\ x_0<\ldots<x_n,\ n\geq m$$

Ist $\in L_A^m(I)$, $F^{(m)}\neq\theta$, so kann $\alpha=(m-1)!/\|F^{(m)}\|_A$ gewählt werden.

B e w e i s a) $\Rightarrow$ b) Nach (1.2) gibt es $\alpha'>0$ mit $\varrho_A(\alpha' F^{(m)})\leq 1$. Da ϱ_A unterhalbstetig ist, kann $\alpha'=\|F^{(m)}\|_A^{-1}$ gewählt werden.

$$\alpha'|F[x_i,\ldots,x_{i+m}]|=\alpha'/((m-1)!\,(x_{i+m}-x_i)|)\,F^{(m-1}(\eta_i)-F^{(m-1)}(\xi_i)|$$

$$\leq \alpha'/(m-1)!\,(x_{i+m}-x_i)\left|\int_{\xi_i}^{n_i} F^{(m)}(s)\,ds\right|,$$

wobei $x_{i+1}\leq\eta_i\leq x_{i+m'}$ $x_i\leq\xi_i\leq x_{i+m-1}$.

Da A monoton nichtfallend ist (beachte: A konvex, symmetrisch, $A(0)=0$), folgt mit $a=a'(m-1)!$:

$$A(aF[x_i,\ldots,x_{i+m}])\leqq A(x_{i+m}-x_i)^{-1}\int_{x_i}^{x_{i+m}} a'\,|F^{(m)}(s)|\,ds$$

$$\leqq (x_{i+m}-x_i)^{-1}\int_{x_i}^{x_{i+m}} A(a'\,|F^{(m)}(s)|)\,ds.$$

In der letzten Abschätzung haben wir die Jensensche Ungleichung verwendet (siehe [9]). Daraus folgt:

$$\sum_{i=0}^{n-m} A(aF[x_i,\ldots,x_{i+m}])\,(x_{i+m}-x_i)\leqq \sum_{i=0}^{n-m}\int_{x_i}^{x_{i+m}} A(a'F^{(m)}(s))\,ds\leqq \varrho_A(a'F^{(m)})\leqq 1.$$

b) $\Longrightarrow$ a) Sei zunächst $m=1$. Wir zeigen: F ist absolutstetig. Seien

$$x_0<x_1<\ldots<x_n \text{ und } \delta:=\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i).$$

$$(2.2)\qquad \sum_{i=0}^{n-1} a\,|F(x_{i+1})-F(x_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} a\,|F[x_i,\ x_{i+1}]|\,(x_{i+1}-x_i)$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} a\,|F[x_i,\ x_{i+1}]|\,ds\leqq \|\chi_{[x_0,\,x_n]}\|_{A^*}\,\|\psi\|_{A'}$$

wobei $\psi(s)=\sum_{i=0}^{n-1} aF[x_i,\ x_{i+1}]\,\chi_{[x_i,\,x_{i+1}]}(s)$; bei der letzten Abschätzung haben wir die Hölderungleichung benutzt.

Da $\varrho_A(s)=\sum_{i=0}^{n-1} A(aF[x_i,\ x_{i+1}])\,(x_{i+1}-x_i)\leqq 1$, folgt auch

$\|\psi\|_A\leqq 1$ (siehe Definition (1.2)).

Aus (2.2) folgt also: $\sum_{i=0}^{n-1}|F(x_{i+1})-F(x_i)|\leqq 1/a\,\|\chi_{[x_0,\,x_n]}\|_{A^*}$. Mit (2.1) folgt nun, daß F absolutstetig ist, d. h. es existiert F', und es gilt $F'\in L_1(I)$. Ferner gilt f. ü. $F'(s)=\lim\{\psi_n(s):n\}$, wobei $a\leqq x_0^n\leqq s<x_1^n\leqq b$, $\lim x_0^n=\lim x_1^n=s$, und $\psi_n(s)=F[x_0^n,\ x_1^n]\,\chi_{[x_0^n,\ x_1^n]}$. Es folgt:

$$\varrho_A(aF')=\lim_n\int_{x_0^n}^{x_1^n} A(aF[x_0^n,\ x_1^n])\,ds=\lim_n A(aF[x_0^n,\ x_1^n])(x_1^n-x_0^n)\leqq 1.$$

Also gilt: $F'\in L_A(I)$, d. h. $F\in L_A^1(I)$.

Sei nun $m>1$.

$$\sum_{i=0}^{n-m} a\,|F[x_i,\ldots,x_{i+m}]|\,(x_{i+m}-x_i)=\sum_{i=0}^{n-m}\sum_{x_i}^{x_{i+m}} a\,|F[x_i,\ldots,x_{i+m}]|\,ds$$

$$=\sum_{i=0}^{n-m}\int_{x_i}^{x_{i+m}} a\,|F[x_i,\ldots,x_{i+m}]|\,ds\leqq\|\chi_{[x_0,\ x_n]}\|_{A^*}.$$

Wir haben noch zu zeigen: $F^{(m-1)} \in L^1_A(I)$, d. h. $\Sigma_{i=0}^{n-1} A(a' \,|\, F^{(m-1)}[x_i, x_{i+1}]\,|)(x_{i+1} - x_i) \leq 1$ für alle $x_0 < \ldots < x_n$ in I mit geeignetem $a' > 0$. Seien also $x_0 < \ldots < x_n$; definiere für jedes $i = 0, \ldots, n-1$ und jedes $j = 0, \ldots, m-1$ Folgen von Punkten $Y^{l,j}_{i,k}$, mit:

$$x_i = Y^{l,j}_{i,0} < \ldots < Y^{l,j}_{i,m} = x_{i+1}, \; l \in \mathbb{N},$$
$$\lim_l Y^{l,j}_{i,j} = x_i, \; \lim_l Y^{l,j}_{i,j+1} = x_{i+1},$$

und setze:

$$a_{ij} = \lim_l F[Y^{l,j}_{i,1}, \ldots Y^{l,j}_{i,m}]\,(m-1)!, \; b_{ij} = \lim_l F[Y^{l,j}_{i,0}, \ldots, Y^{l,j}_{i,m-1}](m-1)!$$

Es gilt dann:

$$a_{i0} = F^{(m-1)}(x_{i+1}), \; b_{im-1} = F^{(m-1)}(x_i), \; a_{ij} = b_{ij-1}, \; i = 0, \ldots, n-1, \; j = 1, \ldots, m-1$$

(Die letzte Gleichheit folgt durch Abzählen der Punkte, die gegen x_i bzw x_{i+1} konvergieren).
Da A konvex ist, folgt:

$$A\Big(\frac{1}{m} \cdot \frac{a(m-1)!}{(x_{i+1}-x_i)} \sum_{j=0}^{m-1} |a_{ij} - b_{ij}|\Big)(x_{i+1} - x_i) \leq \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} A\Big(\frac{a(m-1)!}{(x_{i+1}-x_i)} \times |a_{ij} - b_{ij}|\Big)\,(x_{i+1} - x_i).$$

Daraus folgt für $a' = (m-1)$:

$$\sum_{i=0}^{n-1} A\Big(\frac{a'}{m} |F^{(m-1)}[x_{i+1}, x_i]|\Big)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} A\Big(\frac{1}{m} \frac{a'}{(x_{i+m} - x_i)} \cdot \times |a_{i0} - b_{im-1}|\Big)\,(x_{i+1} - x_i)$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} A\Big(\frac{1}{m} \cdot \frac{a'}{(x_{i+m} - x_i)} \Big| \sum_{j=0}^{m-1} (a_{ij} - b_{ij})\Big|\Big)\,(x_{i+1} - x_i)$$
$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} A\Big(\frac{a'}{(x_{i+m} - x_i)} |a_{ij} - b_{ij}|\Big)(x_{i+1} - x_i)$$
$$= \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} A\Big(\frac{a'}{(x_{i+1} - x_i)} |a_{ij} - b_{ij}|\Big)\,(x_{i+1} - x_i)$$
$$\leq \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} \lim_l A\Big(\frac{(m-1)!\,a'}{(x_{i+1} - x_i)} \Big| F[Y^{l,j}_{i,1}, \ldots, Y^{l,j}_{i,m}] - F[Y^{l,j}_{i,0}, \ldots, Y^{l,j}_{i,m-1}]\Big|\Big).(x_{i+1} - x_i) \leq \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} 1 = 1.$$

Beispiele für Funktionen $A \notin Y_a$ sind:

(1) $\qquad A(u) = |u|; \; L_A(I) = L_1(I)'$

(2) $$A(u) = \begin{cases} |u|, & |u| \leq 1, \\ \infty, & |u| > 1; \; L_A(I) = L_1(I) \cap L_\infty(I), \end{cases}$$

$$A(u)=\begin{cases} o & , |u|\leq 1, \\ |u|^{-1}, & |u|>1; \end{cases} \quad L_A(I)=L_1(I)+L_\infty(I).$$

3. A — Splines. Sei $E\subset I$, $F: T\to \mathbb{R}$; zu jedem $x\in E$ sei eine Zahl $a(x)\in\{0,\ldots,m-1\}$ gegeben und es existiere $F^j(x)$, $0\leq j\leq a(x)$ für jedes $x\in E$. Wir setzen: $\overline{K}_E(F)=\{f\in L_A^m(I)\,|\,(f-F)^{(j)}(x)=0,\ 0\leq j\leq a(x),\ x\in E\}$, $K_E(F)=\{f\in \overline{K}_E(F)\,|\,\varrho_A(f^{(m)})<\infty\}$. Es sind offensichtlich äquivalent: i) $\overline{K}_E(F)\neq\emptyset$, ii) $K_E(\alpha F)\neq\emptyset$ für ein $\alpha>0$.

Wir formulieren zwei Probleme:

(3.1) Wann gilt $K_E(F)\neq\emptyset$?

(3.2) Gibt es $s\in K_E(F)$ mit $\varrho_A(s^{(m)})=\inf\{\varrho_A(f^{(m)})\,|\,f\in K_E(F)\}$?

Ergebnisse in den obigen Fragestellungen sind im Fall $A=A_p$, $1<p\leq\infty$, zu finden u. a. in [4, 5, 7]. Die Existenz einer Lösung von (3.2) wurde in [1] gezeigt unter den Voraussetzungen: $K_E(F)\neq\emptyset$, $a(E)=\sum_{x\in E} a(x)\geq m$, $A\in Y_a$; dort werden auch allgemeinere Probleme behandelt.

Sei $A\in Y_a$; wir setzen: $E_{A^*}(I):=\{f\in L_A(I)\,|\,\varrho_A(\alpha f)<\infty$ f. a. $\alpha>0\}$. Es gilt: $E_{A^*}(I)$ ist separabler Banachraum (unter der Norm $\|\ \|_A$) mit Dualraum $L_A(I)$. Daraus folgt [11, S. 209]:

(3.3) Die Kugeln $B_r(\theta):=\{g\in L_A(I)\,|\,\|g\|_A\leq r\}$, $r>0$, sind $\varrho(L_A(I), E_{A^*}(I))$ folgenkompakt.

Wir setzen: $U_E:=\{f\in L_A^m(I)\,|\,f^{(j)}(x)=0,\ 0\leq j\leq a(E),\ x\in E\}$, $V_E:=\{f^{(m)}\in L_A(I)\,|\,f\in U_E\}$, und zeigen:

Lemma 1: *Sei $A\in Y_a$ und $a(E)\geq m$. Dann ist $W_E(F)=\{f^{(m)}\in L_A(I)\,|\,f\in\overline{K}_E(F)\}$ $\sigma(L_A(I), E_{A^*}(I))$ — abgeschlossen.*

Beweis: Jedes $f\in L_A^m(I)$ hat eine Darstellung $f(t)=u(t)+\int_I k(t,s)f^{(m)}(s)ds$, $t, s\in I$, wobei $u\in P_{m-1}$, $k(t,s)=(1/(m-1)!)\,(t-s)_+^{m-1}$.

Wegen $a(E)\geq m$ gilt: $U_E\cap P_{m-1}=\{\theta\}$.

Damit sind die Voraussetzungen eines Lemmas von J. W. Jerome [9] für den Fall $A=A_\infty$ erfüllt; dieser Beweis läßt sich fast wörtlich übertagen.

Lemma 2: *Sei $A\in Y_a$, $a(E)\geq m$ und $K_E(F)\neq\emptyset$. Dann besitzt Problem (3.2) eine Lösung.*

Beweis: Dies folgt aus Lemma 1 mit (3.3) unter Beachtung von: ϱ_A ist $\sigma(L_A(I), E_{A^*}(I))$-unterhalbstetig (siehe [1]).

Problem (3.2) läßt sich für endliches E mit Hilfe der B-Splines in eine „Favard"-Problem umschreiben. Sei also $E=\{x_1,\ldots,x_{m+n}\}$, $n\in\mathbb{N}$, wobei $x_i<x_{i+m}$, $1\leq i\leq n$. Setze $g_m(t,s)=(1/(m-1)!)\,(t-s)_+^{m-1}$, $t, s\in I$, und $N_{i,m}(s)=(x_{i+m}-x_i)\,g_m[x_i,\ldots,x_{i+m}]\,(s)$, $1\leq i\leq n$. Man rechnet nach (siehe etwa [2, S. 178]): $\int_I N_{i,m}(s)f^{(m)}(s)ds=(m-1)!\,f[x_i,\ldots,x_{i+m}]\,(x_{i+m}-x_i)$, $1\leq i\leq n$.

Damit folgt:

$$W_E(F)=\{f^{(m)}\,|\,f\in\overline{K}_E(F)\}=\{g\in L_A(I)\,|\,\int_I N_{i,m}(s)\,g(s)\,ds \tag{3.4}$$
$$=(m-1)!\,F[x_i,\ldots,x_{i+m}]\,(x_{i+m}-x_i),\ 1\leq i\leq n\}.$$

Damit läßt sich (3.2) „umformulieren“ in:

(3.5) Gibt es $w \in W_E(F)$ mit $\varrho_A(w) = \inf\{\varrho_A(g) \mid g \in W_E(E)\}$?

Aus (3.4) folgt: $V_E^1 = \operatorname{span}(N_{1,m}, \ldots, N_{n,m})$.

Aus der Dualitätstheorie für konvexe Funktionen erhält man, falls ϱ_A stetig in einem $g \in W_E(F)$ ist, in diesem Fall:

$$(3.6) \quad \inf\{\varrho_A(g) \mid g \in W_E(F)\} = \max\{\varrho_{A^*}(g_\alpha) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i (x_{i+m} - x_i) \mid \alpha \in \mathbb{R}^n\}$$

wobei $g_\alpha(t) = \Sigma_{i=1}^n \alpha_i N_{i,m}(t)$, $c_i = (m-1)!\, F[x_i, \ldots x_{i+m}]$, $1 \leq i \leq n$. Daraus lassen sich in der üblichen Weise [6, S. 67] sofort Charakterisierungsaussagen gewinnen.

4. Fortsetzbarkeit von Funktionen. Wir wenden uns nun Problem (3.1) zu; der folgende Satz stellt einen Zusammenhang zwischen den Problemen (3.1) und (3.2) her.

Satz 2: *Sei $A \in Y_a$ und sei $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen von I mit: $E_n \subset E_{n+1}$, $a(E_n) \geq m$, $n \in \mathbb{N}$. Dann sind äquivalent:*

a) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_{E_n}(F) \neq \emptyset$;

b) *Es gibt eine Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $v_n \in K_{E_n}(F)$, mit $\varrho_A(v_n^{(m)}) \leq c < \infty$, $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis: Unter der Voraussetzung a) oder b) gilt: $K_{E_n}(F) \neq \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$ Es folgt aus Lemma 2, daß es für jedes $n \in \mathbb{N}$ $s_n \in K_{E_n}(F)$ gibt mit: $\varrho_A(s_n^{(m)}) = \inf\{\varrho_A(f^{(m)}) \mid f \in K_{E_n}(F)\}$.

a) $\Rightarrow$ b) Sei $v \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_{E_n}(F)$; dann gilt: $\varrho_A(s_n^{(m)}) \leq \varrho_A(v^{(m)}) < \infty$

b) $\Rightarrow$ a) Offensichtlich ist die Folge $(s_n^{(m)})_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt in $L_A(I)$. Wegen (3.3) gibt es $g \in L_A(I)$ und eine Teilfolge $(s_{n_l})_{l \in \mathbb{N}}$, so daß $(s_{n_l})_{l \in \mathbb{N}}$ $\sigma(L_A(I), E_{A^*}(I))$-konvergent gegen g ist. Es folgt wegen Lemma 1: $g \in \bigcap_{l \in \mathbb{N}} W_{E_l}(F)$. Da $\varrho_A\, \sigma(L_A(I), E_{A^*}(I)$-unterhalbstetig ist, gilt $\varrho_A(g) < \infty$. Es gibt also $v_{n_l} \in K_{E_{n_l}}(F)$ mit: $g = v_{n_l}^{(m)}$, $l \in \mathbb{N}$. Wegen $a(E_n) \geq m$, $n \in \mathbb{N}$, folgt: $v_{n_l} = v_{n_k}$ f. a. $l, k \in \mathbb{N}$. Aus $K_{E_n}(F) \supset K_{E_{n+1}}(F)$, $n \in \mathbb{N}$, folgt sofort: $v_{n_1} \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_{E_n}(F)$.

Folgerung 1: Sei $A \in Y_a$, $E = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ mit $x_i < x_{i+m}$, $i \in \mathbb{N}$, und sei $F: E \to \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

a) $\overline{K}_E(F) \neq \emptyset$

b) $\bigvee_{\alpha<0} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} (\sum_{i=1}^{n-m} A(\alpha F[x_i, \ldots, x_{i+1}])(x_{i+m} - x_i) \leq 1)$.

Beweis: a) $\Rightarrow$ b) Dies folgt analog Satz 1.

b) $\Rightarrow$ a) Wir zeigen $K_E(\alpha' F) \neq \emptyset$ für ein $\alpha' > 0$; daraus folgt sofort: $\overline{K}_E(F) \neq \emptyset$. Wegen Satz 2 genügt es zu zeigen: Es gibt eine Folge $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit: $w_n \in W_{E_n}(\alpha' F)$, $\varrho_A(w_n) \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$, wobei $E_n = \{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$.

Sei $\Delta_i = \max\{(x_{j+1}-x_j): i \leq j \leq i+m-1\}$. De Boor [4] konstruiert Funktionen $h_i: I \to \mathbb{R}$ mit

(1) $\{x \in I \mid h_i(x) \neq \emptyset\} \subset [x_i, x_{i+m}]$,

(2) $\int_I h_i(s)\, N_{j,m}(s)\, ds = \delta_{ij}(x_{i+m}-x_i)$, $1 \leq j \leq n$,

(3) $\| h_i \|_\infty \leq D_m (x_{i+m}-x_i) \Delta_i^{-1} m^{-1}$, wobei $D_m > 0$ nur von m abhängt.

Setze $c_i = (m-1)!\; F[x_i, \ldots, x_{i+m}]$, $i = 1, \ldots, n$, und $w_n(t) := \sum_{i=1}^{n} (a/D_m m)\, c_i\, h_i(t)$, $n \in \mathbb{N}$. Man sieht sofort mit (2): $w_n \in \bar{K}_{E_n}((a/D_m m) F)$, $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen die „Beschränktheit" von $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\varrho_A(w_n) = \sum_{i=1}^{n+m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} A(w_n(t))\, dt;$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} A(w_n(t))\, dt \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} A\Big(\sum_{j=\max(1,\, i-m)}^{\min(n,\, i)} \frac{a}{D_m \cdot m}\, c_j h_j(t)\Big)\, dt$$

$$\leq A\Big(\sum_{j=\max(1,\, i-m)}^{\min(n,\, i)} \frac{a}{m} |c_j| \Big(\frac{x_{j+1}-x_j}{m \Delta_i}\Big)\Big) \Delta_i \leq A\Big(\sum_{j=\max(1,\, i-m)}^{\min(n,\, i)} \frac{a}{m} |c_j|\Big)(x_{j+1}-x_j)/m$$

$$\leq m^{-2} \Big(\sum_{j=\max(1,\, i-m)}^{\min(n,\, i)} A(a c_j)\, (x_{j+1}-x_j).$$

Daraus folgt:

$$\varrho_A(w_n) \leq \sum_{i=1}^{n} m^{-2} \sum_{j=\max(1,\, i-m)}^{\min(n,\, i)} A(a c_j)(x_{j+1}-x_j) \leq \sum_{i=1}^{n} A(a c_i)(x_{i+1}-x_i)/m \leq 1/m.$$

Analog beweist man Folgerung 2: Sei $A \in Y_a$ und $F: I \to \mathbb{R}$ stetig Dann sind äquivalent.

a) $F \in L_A^m(I)$;

b) Es gibt $a > 0$ und eine Folge von Zerlegungen

E_l: $x_1^l < \ldots < x_{n_l}^l$ von I, $n_l \geq m$, mit

i) $E_l \subset E_{l+1}$, $a(x_i^l) = 0$, $1 \leq i \leq n_l$, $l \in \mathbb{N}$,

ii) $\bigcup_{l \in \mathbb{N}} E_l \cap \bar{I} = \bar{I}$ für jedes endliche Teilintervall von T,

so daß $\sum_{i=0}^{n-n_l} A(a F[x_i^l, \ldots, x_{i+m}^l]) \cdot (x_{i+m}-x_i) \leq 1.$

LITERATUR

1. J. Baumeister. Über die Extremaleigenschaft nichtlinearer Splines. Dissertation, München, 1974.
2. K. Böhmer. Spline-Funktionen. Stuttgart, 1974.
3. C. de Boor. On "best" interpolation. *J. Approx. Theory*, 15, 1976., 28—42.
4. C. de Boor. How small can one make the derivatives of an interpolating function. *J. Approx. Theory*, 13, 1975, 105—116.
5. M. Golomb. $H^{m,p}$-extensions by $H^{m,p}$-splines. *J. Approx. Theory*, 7, 1972, 238—275.

6. R. H o l m e s. A course on optimization and best approximation. Berlin, 1972.
7. J. W. J e r o m e, L. L. S c h u m a k e r. Characterizations of absolute continuity and essential boundness for higher order derivatives. *J. Math. Anal. Appl.*, 42, 1973, 452—465.
8. J. W. J e r o m e. Minimazation problems and linear and nonlinear spline functions *I* Existence. *SIAM J. Num. Anal.*, **10**, 1973, 808—819.
9. M. A. K r a s n o s e l s k i i, Y. B. R u t i c k i i. Convex functions and Orlicz spaces Groningen, 1961.
10. W. A. L u x e m b u r g. Banach function spaces. Thesis, Delft, 1955.
11. A. E. T a y l o r. Introduction to functional analysis. New York, 1958.

Universität Frankfurt,
Fachbereich Mathematik,
Robert-Mayer-Str. 60—10
D—*6000 Frankfurt/M.*

Eingegangen am 28 August 1977