КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'77
София . 1980, с. 373—380

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'77
Sofia . 1980, p. 373—380

PUNKTWEISE ÜBERKONVERGENZ VON POTENZREIHEN

W. Luh, R. Trautner

Zusammenfassung. In der vorliegenden Arbeit wird untersucht, auf welchen Mengen Potenzreihen überkonvergieren können. Die beiden folgenden Sätze werden bewiesen. Satz 1. Es sei $0\leq r<\infty$. Dann gibt es eine Potenzreihe vom Konvergenzrapius r, die in $|z|<r$ fast überall punktweise, aber in keinem Gebiet kompakt überkonvergiert.

Satz 2. Es seien $M^{(0)}, M^{(1)}, \ldots$ endlich oder abzählbar viele, meßbare, paarweise disjunkte Mengen. $M^{(0)}$ sei ein endliches, einfach zusammenhängendes Gebiet, $M^{(0)}\supset\{z:|z|<1\}$, $1\notin M^{(0)}$. Für $k=1, 2\ldots$ sei $f^{(k)}$ analytisch auf $\overline{M^{(k)}}$. Dann gibt es eine genau in $M^{(0)}$ analitische Funktion $f^{(0)}$, deren Potenzreihe $f^{(0)}(z)=\Sigma_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ folgende Eigenschaft hat: Eine Teilfolge $\{s_{n_j}(z)\}$ ihrer Teilsummenfolge konvergiert für $k=0, 1\ldots$ auf $M^{(k)}$ fast überall gegen $f^{(k)}(z)$; die Konvergenz ist kompakt, falls $M^{(k)}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist. Überdies divergiert $\{s_{n_j}(z)\}$ fast überall auf $(\bigcup_{k\geq 0} M^{(k)})^c$.

1. Gegeben sei eine Potenzreihe

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \tag{1}$$

vom Konvergenzradius r, $0\leq r<\infty$ mit den Partialsummen $s_n(z)=\Sigma_{k=0}^{n} c_k z^k$. Die Reihe (1) heißt bezüglich einer Teilfolge $\{n_j\}$ überkonvergent im Punkt z_0, $|z_0|>r$, wenn $\{s_{n_j}(z_0)\}$ konvergiert; sie heißt bezüglich $\{n_j\}$ kompakt überkonvergent in einem Gebiet G mit $G\cap\{z:|z|>r\}\neq\emptyset$, wenn $\{s_{n_j}(z)\}$ in G kompakt konvergiert.

Die bisherigen Untersuchungen beziehen sich fast ausschließlich auf kompakte Überkonvergenz, die nach A. Ostrowski [6, 7] eng mit einer Lückenbedingung für die Koeffizienten c_k gekoppelt ist (vgl. die Monographien von G. Bourion [1], L. Ilieff [2]). W. Luh [3] zeigte mit Hilfe funktionentheoretischer Approximationssätze, daß sowohl punktweise als auch kompakte Überkonvergenz weitgehend beliebig auftreten kann.

Satz A. *Es seien $G^{(0)}, G^{(1)}, \ldots$ endlich oder abzählbar viele endliche, paarweise fremde Gebiete. $G^{(0)}$ enthalte den Einheitskreis, und es sei $1\notin G^{(0)}$. Für $k=1, 2, \ldots$ sei $f^{(k)}$ analytisch in $G^{(k)}$.*
Dann gibt es eine genau in $G^{(0)}$ analytische Funktion $f^{(0)}$ und eine Folge $\{n_j\}$, so daß die Potenzreihe $f^{(0)}(z)=\Sigma_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$ bezüglich $\{n_j\}$:

(1) *für* $k=0, 1, \ldots$ *in* $G^{(k)}$ *zum Wert* $f^{(k)}(z)$ *überkonvergiert; die Konvergenz ist kompakt in* $G^{(k)}$, *wenn* $G^{(k)}$ *einfach zusammenhängend ist;*
(2) *in* $(\bigcup_{k\geq 0} G^{(k)})^c$ *nicht überkonvergiert.*

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, zu zeigen, daß noch allgemeinere Effekte auftreten können.

Daß punktweise Überkonvergenz ohne gleichzeitige kompakte Überkonvergenz möglich ist, zeigt

Satz 1. *Es sei* $0\leq r<\infty$. *Dann gibt es eine Potenzreihe* $f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$ *vom Konvergenzradius r, die in* $|z|>r$ *fast überall punktweise, aber in keinem Gebiet kompakt überkonvergiert.*

Aussagen über die Struktur der Punktmengen, auf welchen Überkonvergenz eintreten kann und die möglichen Grenzfunktionen gibt

Satz 2. *Es seien* $M^{(0)}, M^{(1)}, \ldots$ *endlich oder abzählbar viele meßbare, paarweise disjunkte Mengen.* $M^{(0)}$ *sei ein endliches, einfach zusammenhängendes Gebiet, das den Einheitskreis enthält mit* $1\notin M^{(0)}$. *Für* $k=1, 2, \ldots$ *sei* $f^{(k)}$ *analytisch auf* $\overline{M^{(k)}}$.
Dann gibt es eine genau in $M^{(0)}$ *analytische Funktion* $f^{(0)}$ *und eine Folge* $\{n_j\}$, *so daß die Potenzreihe* $f^{(0)}(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$ *bezüglich* $\{n_j\}$:
(1) *für* $k=0, 1, \ldots$ *in* $M^{(k)}$ *fast überall zum Wert* $f^{(k)}(z)$ *überkonvergiert; die Konvergenz ist kompakt in* $M^{(k)}$, *wenn* $M^{(k)}$ *ein endliches, einfach zusammenhängendes Gebiet ist;*
(2) *in* $(\bigcup_{k\geq 0} M^{(k)})^c$ *fast überall nicht überkonvergiert.*

2. Wir stellen zunächst Bezeichnungen und Hilfsmittel zusammen. Für eine Menge $M\subset\mathbb{C}$ bezeichne $\mu(M)$ das (zweidimensionale) Lebesguesche Maß von M. Für Mengen $M_1, M_2\subset\mathbb{C}$ bezeichne

$$M_1\triangle M_2 := (M_1\cup M_2)\setminus(M_1\cap M_2)$$

ihre symmetrische Differenz. Ist M eine beliebige Menge und $\delta>0$ gegeben, so sei

$$U_\delta(M) := \{z : |z-\zeta|<\delta,\ \zeta\in M\}$$

ihre δ-Umgebung. Für ein Polynom $P(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ mit $a_n\neq 0$ bezeichne $|P|=n$ seinen Grad.

Wir formulieren ferner drei Lemmas, die wir später benötigen.

Lemma 1 (Approximationssatz von S. Mergelyan [5]). *Es sei* $B\subset\mathbb{C}$ *eine kompakte Menge mit zusammenhängendem Komplement. Die Funktion* Φ *sei stetig auf B und analytisch im Innern von B. Dann existiert eine Folge von Polynomen, welche auf B gleichmäßig gegen* Φ *konvergiert.*

Lemma 2 (Approximation meßbarer Mengen durch einfach zusammenhängende Gebiete [4]). *Gegeben seien n paarweise disjunkte, meßbare Mengen* $M_1, M_2, \ldots, M_n$ *mit endlichem Maß. Gegeben seien ferner* $\varepsilon>0$ *und* $\delta>0$. *Dann existieren beschränkte, einfach zusammenhängende Gebiete*

$$\begin{gathered} P_{11}, P_{12}, \ldots, P_{1m_1}, \\ P_{21}, P_{22}, \ldots, P_{2m_2}, \\ \vdots \\ P_{n1}, P_{n2}, \ldots, P_{nm_n}, \end{gathered}$$

so daß für $k=1, 2, \ldots, n$ und $j_k=1, 2, \ldots, m_k$ folgendes gilt:

(1) *die Mengen $\overline{P_{kj_k}}$ sind paarweise disjunkt,*

(2) $\overline{P_{kj_k}} \subset U_\delta(M_k)$,

(3) *für* $G_k = \bigcup_{j_k=1}^{m_k} P_{kj_k}$ *gilt* $\mu(M_k \triangle G_k) < \varepsilon$.

Lemma 3 (Großer Ostrowskischer Überkonvergenzsatz [8]). *Es sei $f(z)=\Sigma_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$ eine Potenzreihe vom Konvergenzradius 1. Es sei*

$$p_1 < q_1 < p_2 < q_2 < \cdots, \quad \lim_{k\to\infty} q_k/p_k = \infty$$

und $c_\nu = 0$ für $\nu \in \bigcup_{k\geq 1}(p_k, q_k)$. Dann ist das Analytizitätsgebiet G von f einfach zusammenhängend und $\{s_{p_k}(z)\}$ konvergiert in G kompakt gegen $f(z)$.

3. Beweis zu Satz 1. Wir behandeln zunächst den Fall, daß $r>0$ ist; ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $r=1$.

1) Für $n=1, 2, \ldots, k=1, 2, \ldots, 2^n$ betrachten wir folgende Mengen, deren abgeschlossene Hüllen paarweise disjunkt sind:

$$(2) \quad \begin{cases} M_k^{(n)} = \{z : 1 < |z| < n,\ \arg z = 2\pi\, 2^{-n} k\}, \\ G_k^{(n)} = \{z : 1 < |z| < n,\ 2\pi\, 2^{-n}(k-1) + 4^{-n} < \arg z < 2\pi\, 2^{-n} k - 4^{-n}\}, \\ G_0^{(n)} = \{z : |z| < 1 - 2^{-n}\}. \end{cases}$$

2) Es sei

$$(3) \qquad f_n(z) := \begin{cases} 0 \ \text{ für } z \in \overline{G_k^{(n)}} \ \ k=0, 1, 2, \ldots, 2^n \\ n \ \text{ für } z \in \overline{M_k^{(n)}} \ \ k=1, 2, \ldots, 2^n. \end{cases}$$

Nach Lemma 1 existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein Polynom $P_n(z) = \Sigma_{k=0}^{q_n} c_{nk} z^k$ mit $q_n = |P_n|$ und

$$(4) \qquad |P_n(z) - f_n(z)| < 2^{-n} \ \text{ für } z \in \bigcup_{k=0}^{2^n} \overline{G_k^{(n)}} \cup \bigcup_{k=1}^{2^n} \overline{M_k^{(n)}},$$

dabei ist $q_n > q_{n-1}$ wählbar. Aus

$$c_{nk} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{|z|=1-2^{-n}} P_n(z)\, z^{-k-1}\, dz$$

und $|P_n(z)| < 2^{-n}$ für $|z| = 1-2^{-n}$ folgt

$$(5) \qquad |c_{nk}| < 2^{-n}(1-2^{-n})^{-k}.$$

Also erfüllt die Koeffizientenmatrix $V = (c_{nk})$ ($c_{nk}=0$ für $k>q_n$) die Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} c_{nk} = 0 \ \text{ für jedes feste } k = 0, 1, 2, \ldots.$$

3) Wir konstruieren induktiv eine Folge $\{n_j\}$. Es sei $n_0=1$ und für ein $j \geq 1$ sei n_{j-1} schon bestimmt. Dann kann man wegen (5) ein $n_j > n_{j-1}$ finden, so daß gilt $q_{n_j} > q_{n_{j-1}}$ und

$$(6) \qquad \sum_{k=0}^{q_{n_{j-1}}} |c_{n_j k}|\, n_{j-1}^k < 2^{-j}.$$

Wir setzen

$$(7)\qquad c_k=\begin{cases}\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_{n_i k} & \text{falls } 0\leq k\leq q_{n_0}\\ \sum\limits_{i=j}^{\infty} c_{n_i k} & \text{falls } q_{n_{j-1}}<k\leq q_{n_j},\ j\geq 1.\end{cases}$$

Die Konvergenz dieser Reihen ergibt sich unmittelbar aus (5). Wir zeigen, daß die Potenzreihe $f(z):=\Sigma_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ den Konvergenzradius 1 und die geforderten Überkonvergenzeigenschaften bezüglich der Indexfolge $\{q_{n_j}\}$ hat.

4) Wir setzen

$$s_{q_{n_j}}(z):=\sum_{k=0}^{q_{n_j}} c_k z^k,\quad t_j(z):=\sum_{i=0}^{j} P_{n_i}(z)=\sum_{i=0}^{j}\sum_{k=0}^{q_{n_i}} c_{n_i k} z^k.$$

Für ein beliebiges $R>0$ gilt für $|z|\leq R$ und alle j mit $n_j>R$

$$|s_{q_{n_j}}(z)-t_j(z)|=\Big|\sum_{k=0}^{q_{n_j}}\sum_{i=j+1}^{\infty} c_{n_i k} z^k\Big|\leq\sum_{i=j+1}^{\infty}\sum_{k=0}^{q_{n_{i-1}}}|c_{n_i k}|\,n_{i-1}^k\leq\sum_{i=j+1}^{\infty}2^{-i}=2^{-j}.$$

Also konvergiert die Folge $\{s_{q_{n_j}}(z)-t_j(z)\}$ in $\mathbb{C}$ kompakt gegen Null.

5) Auf keinem Gebiet außerhalb des Einheitskreises konvergieren die Folgen $\{s_{q_{n_j}}(z)\}$ und $\{t_j(z)\}$ kompakt. Wegen 4) genügt es, dies für die zweite Folge zu zeigen. Nach Konstruktion der Mengen $M_k^{(n)}$ ist die Menge $M=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{2^n} M_k^{(n)}$ dicht in $\{z:|z|>1\}$.

Ist $\tilde{z}\in M$, so existieren ein $\tilde{n}$ und ein $\tilde{k}\leq 2^{\tilde{n}}$ mit $\tilde{z}\in M_{\tilde{k}}^{(\tilde{n})}$. Für alle $\nu\in\mathbb{N}$ ist dann auch $\tilde{z}\in M_{\tilde{k}\cdot 2^\nu}^{(\tilde{n}+\nu)}$. Aus $|P_{\tilde{n}+\nu}(\tilde{z})-(\tilde{n}+\nu)|<2^{-\tilde{n}-\nu}$ folgt dann die Divergenz der Folge $\{t_j(\tilde{z})\}$.

6) Die Folgen $\{s_{q_{n_j}}(z)\}$ und $\{t_j(z)\}$ konvergieren fast überall. Hierzu sei

$$G^{(n)}=\bigcup_{k=0}^{2^n} G_k^{(n)},\quad G=\liminf_{n\to\infty} G^{(n)}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty} G^{(i)}.$$

Für $z\in\bigcap_{i=n}^{\infty} G^{(i)}$ ist nach (3), (4) $|P_i(z)|\leq 2^{-i}$ für $i\geq n$. Daraus folgt, daß $\{t_j(z)\}$ und nach 4) auch $\{s_{q_{n_j}}(z)\}$ für jedes $z\in\bigcap_{i=n}^{\infty} G^{(i)}$ und damit für jedes $z\in G$ konvergiert.

Wir zeigen, daß G die komplexe Ebene bis auf eine Menge vom Maß Null ausschöpft. Es bezeichne

$$G(R):=G\cap\{z:|z|<R\},\quad G^{(n)}(R):=G^{(n)}\cap\{z:|z|<R\}.$$

Für $n>R$ gilt mit einer gewissen (von n und R unabhängigen) Konstanten K

$$\mu(\{z:|z|<R\}\setminus G^{(n)}(R))\leq 2^{-n}KR^2,$$

also

$$\mu(\{z:|z|<R\}\setminus\bigcap_{i\geq n} G^{(i)}(R))\leq\sum_{i=n}^{\infty}\mu(\{z:|z|<R\}\setminus G^{(i)}(R))\leq\sum_{i=n}^{\infty}KR^2 2^{-i}=2KR^2 2^{-n}.$$

Für $n \to \infty$ folgt daraus $\mu(\{z:|z|<R\} \setminus G(R))=0$, und da dies für beliebiges $R>0$ gilt, ist auch $\mu(G^c)=0$.

7) Es ergibt sich sofort, daß die konstruierte Potenzreihe $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ den Konvergenzradius 1 hat. Damit ist der Beweis für den Fall $r>0$ erbracht.

8) Im Falle $r=0$ konstruieren wir die Matrix $V=(c_{nk})$ und die Folge $\{n_i\}$ wie oben. Statt (7) setzen wir

$$(7^*) \qquad c_k^* := \begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} c_{n_i k} & \text{falls } 0 \leqq k \leqq q_{n_0} \\ \sum_{i=j}^{\infty} c_{n_i k} \cdot n_{i-1}^{k/2} & \text{falls } q_{n_{j-1}} < k \leqq q_{n_j},\ j \geqq 1. \end{cases}$$

Die Konvergenz dieser Reihen ergibt sich wieder aus (5). Wir betrachten die Potenzreihe $f^*(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k^* z^k$ und setzen

$$s_n^*(z) := \sum_{k=0}^{n} c_k^* z^k,$$

$$t_j^*(z) := \sum_{i=0}^{j} P_{n_i}(n_{i-1}^{1/2} \cdot z) = \sum_{i=0}^{j} \sum_{k=0}^{q_{n_i}} c_{n_i k} \cdot n_{i-1}^{k/2} \cdot z^k.$$

Die Folge $\{s_{q_{n_j}}^*(z) - t_j^*(z)\}$ konvergiert in $\mathbb{C}$ kompakt gegen Null. Es gilt nämlich für beliebiges $R>0$, $|z|<R$ und alle j mit $n_j^{1/2} \geqq R$

$$|s_{q_{n_j}}^*(z) - t_j^*(z)| \leqq \sum_{k=0}^{q_{n_j}} \sum_{i=j+1}^{\infty} |c_{n_i k} \cdot n_{i-1}^{k/2} \cdot z^k| \leqq \sum_{k=0}^{q_{n_j}} \sum_{i=j+1}^{\infty} |c_{n_i k}| n_{i-1}^k$$

$$\leqq \sum_{i=j+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{q_{n_i}} |c_{n_i k}| n_{i-1}^k \leqq \sum_{i=j+1}^{\infty} 2^{-i} = 2^{-j}.$$

Daß die Folge $\{t_j^*(z)\}$ fast überall punktweise, jedoch in keinem Gebiet kompakt konvergiert, zeigt man analog zu 5) und 6). Es folgt dann sofort, daß die Potenzreihe $f^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^* z^k$ den Konvergenzradius 0 hat.

Beweis zu Satz 2. Wir setzen zur Abkürzung $M^* = (\bigcup_{k \geq 0} M^{(k)})^c$.

1) Für eine natürliche Zahl n betrachten wir folgende Mengen:

$$M_n^{(k)} = M^{(k)} \cap \{z : |z| < n\} \quad k=0, 1, 2, \ldots$$

$$M_n^* = M^* \cap \{z : |z| < n\}.$$

Wir wählen ein $\delta_n > 0$ so, daß für $k=1, \ldots, n$ die Funktionen $f^{(k)}$ auf $U_{\delta_n}(M_n^{(k)})$ analytisch sind. Nach Lemma 2 gibt es beschränkte, einfach zusammenhängende Gebiete

$$P_{n1}^{(k)}, P_{n2}^{(k)}, \ldots, P_{nm_n^{(k)}}^{(k)}, \quad k=0, 1, \ldots, n$$

$$P_{n1}^*, P_{n2}^*, \ldots, P_{nm_n^*}^*,$$

deren abgeschlossene Hüllen paarweise fremd sind, so daß mit

$$G_n^{(k)} = P_{n1}^{(k)} \cup P_{n2}^{(k)} \cup \cdots \cup P_{nm_n^{(k)}}^{(k)} \quad k=0, 1, \ldots, n$$

$$G_n^* = P_{n1}^* \cup P_{n2}^* \cup \cdots \cup P_{nm_n^*}^*$$

folgendes gilt:

$$(8) \qquad \begin{cases} \overline{G_n^{(k)}} \subset U_{\delta_n}(M_n^{(k)}), & k=0, 1, \ldots, n \\ \mu(G_n^{(k)} \Delta M_n^{(k)}) < 2^{-n}, & k=0, 1, \ldots, n \\ \mu(G_n^* \Delta M_n^*) < 2^{-n}. \end{cases}$$

Ist $M^{(k)}$ ein endliches, einfach zusammenhängendes Gebiet und Φ_k eine konforme Abbildung des Einheitskreises auf $M^{(k)}$, so ist hierbei für hinreichend kleines $\varepsilon_n > 0$

$$G_n^{(k)} = \Phi_k(\{z : |z| < 1 - \varepsilon_n\}) \cap \{z : |z| < n\}$$

wählbar.

2) Wir konstruieren induktiv eine Folge $\{q_n\}$ natürlicher Zahlen und eine Folge $\{P_n\}$ von Polynomen.
Wir wählen $q_1 = 1$ und $P_1(z) = z$. Es seien für eine natürliche Zahl $n \geqq 2$ die Zahlen $q_1, \ldots, q_{n-1}$ und die Polynome $P_1, \ldots, P_{n-1}$ schon bekannt. Wir wählen q_n so, daß gilt

$$(9) \qquad q_n > n \,.\, (q_{n-1} + |P_{n-1}|) =: n \,.\, p_n \,.$$

Nach Lemma 1 gibt es ein Polynom P_n, das für $k = 1, \ldots, n$ folgendes erfüllt:

$$(10) \qquad \begin{cases} \max\{|P_n(z)| : \overline{G_n^{(0)}}\} < 1/2^n \max\{|z^{q_n}| : \overline{G_n^{(0)}}\} \\ \max\{|z^{-q_n}(f^{(k)}(z) - \sum_{j=1}^{n-1} z_{q^j} P_j(z)) - P_n(z)| : \overline{G_n^{(k)}}\} < 1/2^n \max\{|z^{q_n}| : \overline{G_n^{(k)}}\} \\ \max\{|z^{-q_n}(n - \sum_{j=1}^{n-1} z^{q_j} P_j(z)) - P_n(z)| : \overline{G_n^*}\} < 1/2^n \max\{|z^{q_n}| : \overline{G_n^*}\}. \end{cases}$$

3) Die Funktion $f^{(0)}$ werde definiert durch die Polynomreihe

$$(11) \qquad f^{(0)}(z) := \sum_{j=1}^{\infty} z^{q_j} P_j(z).$$

Ein Polynom $z^{q_j} P_j(z)$ enthält Potenzen von z, deren Exponenten zwischen q_j und $q_j + |P_j| = p_{j+1}$ liegen. Wegen (9) überlappen sich die Potenzen aufeinanderfolgender Polynome nicht, so daß durch formales Ordnen nach steigenden z-Potenzen die Potenzreihe $f^{(0)}(z) = \Sigma_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ entsteht. Ferner gilt

$$\sum_{j=1}^{n-1} z^{q_j} P_j(z) = \sum_{k=0}^{p_n} c_k z^k = s_{p_n}(z).$$

Die Teilsummenfolge $\{s_{p_n}(z)\}$ konvergiert deshalb genau dort punktweise bzw. kompakt, wo die Polynomreihe (11) punktweise bzw. kompakt konvergiert.

4) Wir zeigen, daß die Polynomreihe $\Sigma_{j=1}^{\infty} z^{q_j} P_j(z)$ in $M^{(k)}$ kompakt konvergiert, falls $M^{(k)}$ ein endliches, einfach zusammenhängendes Gebiet ist (insbesondere also im Falle $k=0$). Es sei K eine kompakte Teilmenge von $M^{(k)}$. Dann ist $K \subset G_n^{(k)}$ für alle hinreichend großen n. Für $k>0$ ergibt sich aus (10)

$$\max\{|f^{(k)}(z) - \sum_{j=1}^{n} z^{q_j} P_j(z)| : K\}$$
$$\leqq \max\{|z^{q_n}| : \overline{G_n^{(k)}}\} \max\{|z^{-q_n}(f^{(k)}(z) - \sum_{j=1}^{n-1} z^{q_j} P_j(z)) - P_n(z)| : \overline{G_n^{(k)}}\} < 2^{-n}.$$

Da K beliebig war, konvergiert in diesem Falle $\Sigma_{j=1}^{\infty} z^{q_j} P_j(z)$ in $M^{(k)}$ kompakt gegen $f^{(k)}(z)$. Für $k=0$ ergibt sich ebenfalls aus (10)

$$\max\{|z^{q_n} . P_n(z)| : K\} \leqq \max\{z^{q_n} . P_n(z) | : \overline{G_n^{(0)}}\} < 2^{-n}.$$

Da die Menge K beliebig war, folgt, daß $\Sigma_{j=1}^{\infty} z^{q_j} P_j(z)$ auch in $M^{(0)}$ kompakt konvergiert. Hieraus ergibt sich, daß die Funktion $f^{(0)}$ mindestens in $M^{(0)}$ analytisch ist.

5) Wir zeigen, daß die Polynomreihe $\Sigma_{j=1}^{\infty} z^{q_j} P_j(z)$ für $k>0$ in einer gewissen Menge $B^{(k)}$ mit

$$\mu(B^{(k)} \Delta M^{(k)}) = 0$$

punktweise gegen $f^{(k)}(z)$ konvergiert. Für ein $R>1$ betrachten wir dazu folgende Mengen:

$$M^{(k)}(R) = M^{(k)} \cap \{z : |z| < R\},$$

$$G_n^{(k)}(R) = G_n^{(k)} \cap \{z : |z| < R\},$$

$$B_n^{(k)}(R) = \bigcap_{j \geqq n} G_j^{(k)}(R),$$

$$B^{(k)}(R) = \lim_{n\to\infty} B_n^{(k)}(R) = \bigcup_{n \geqq 1} \bigcap_{j \geqq n} B_j^{(k)}(R),$$

$$B^{(k)} = \lim_{R\to\infty} B^{(k)}(R).$$

Es sei $z \in B^{(k)}$, dann ist $z \in B^{(k)}(R)$ für hinreichend großes R. Ferner existiert ein N mit $z \in B_N^{(k)}(R)$ und somit gilt $z \in G_n^{(k)}(R) \subset G_n^{(k)}$ für alle hinreichend großen n. Wegen (10) ist

$$|f^{(k)}(z) - \sum_{j=1}^{n} z^{q_j} P_j(z)| < 2^{-n}.$$

Hieraus folgt, daß die Polynomreihe $\Sigma_{j=1}^{\infty} z^{q_j} P_j(z)$ in $B^{(k)}$ punktweise gegen $f^{(k)}(z)$ konvergiert.

Wir zeigen jetzt, daß $\mu(M^{(k)} \Delta B^{(k)}) = 0$ ist. Dazu genügt es zu zeigen, daß für jedes $R>1$ gilt: $\mu(M^{(k)}(R) \Delta B^{(k)}(R)) = 0$. Für $n>R$ ist

$$M^{(k)}(R) \Delta G_n^{(k)}(R) \subset M_n^{(k)} \Delta G_n^{(k)},$$

also folgt mit (8) $\mu(M^{(k)}(R) \Delta G_n^{(k)}(R)) < 2^{-n}$ und hieraus

$$\mu(M^{(k)}(R) \Delta B_n^{(k)}(R)) = \mu(M^{(k)}(R) \Delta \bigcap_{j \geqq n} G_j^{(k)}(R)) \leqq \sum_{j \geqq n} \mu(M^{(k)}(R) \Delta G_j^{(k)}(R)) < 2 . 2^{-n}.$$

Für $n \to \infty$ ergibt sich also $\mu(M^{(k)}(R) \Delta B^{(k)}(R)) = 0$.

6) Analog wird eine Menge B^* mit $\mu(B^* \Delta M^*)=0$ konstruiert, auf welcher $\Sigma_{j=1}^{\infty} z^{q_j} P_j(z)$ divergiert. Hierbei wird benutzt, daß aus (10) folgt

$$\left|\sum_{j=1}^{n} z^{q_j} P_j(z)\right| > n - 2^{-n} \quad \text{für } z \in G_n^*.$$

7) Wir untersuchen das Analytizitätsgebiet der Funktion $f^{(0)}$. Für die Koeffizienten c_k der Potenzreihe $f^{(0)}(z)=\Sigma_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ ist $c_k=0$ für $k \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (p_n, q_n)$, wobei nach (9) gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_n}{p_n} = \infty.$$

Nach Lemma 3 ist daher das größte mit dem Nullpunkt zusammenhängende Gebiet kompakter Konvergenz von $\{s_{p_n}(z)\}$ mit dem Analytizitätsgebiet von $f^{(0)}$ identisch. Nach 4) konvergiert $\{s_{p_n}(z)\}$ kompakt in $M^{(0)}$, aber nach 6) in keinem größeren Gebiet als $M^{(0)}$. Daher ist $f^{(0)}$ genau in $M^{(0)}$ analytisch, und die Potenzreihe $f^{(0)}(z)=\Sigma_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ hat den Konvergenzradius 1.

Damit ist Satz 2 bewiesen.

LITERATUR

1. G. Bourion. L'ultraconvergence dans les séries de Taylor. Paris 1937.
2. L. Ilieff. Analytische Nichtfortsetzbarkeit und Überkonvergenz einiger Klassen von Potenzreihen. Berlin 1960.
3. W. Luh. Approximation analytischer Funktionen durch überkonvergente Potenzreihen und deren Matrix-Transformierten. *Mitt. Math. Sem. Gießen, Heft* **88** (1970).
4. W. Luh, R. Trautner. Summierbarkeit der geometrischen Reihe auf vorgeschriebenen Mengen. *Manuscripta Math.*, **18**, 1976, 317—326.
5. С. Н. Мергелян. Равномерное приближение функции комплексного переменного. *Успехи матем. наук*, **87**, 1952, 31—122.
6. A. Ostrowski. Über eine Eigenschaft gewisser Potenzreihen mit unendlich vielen verschwindenden Koeffizienten. *Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss. Phys.- Math.-Kl.* 1921, 557—565.
7. A. Ostrowski. Über Potenzreihen, die überkonvergente Abschnittsfolgen besitzen. *Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl.* 1923, 185—192.
8. A. Ostrowski. Über vollständige Gebiete gleichmäßiger Konvergenz von Folgen analytischer Funktionen. *Abh. Math. Sem. Hamburg. Univ.* **1**, 1922, 327—350.

Fachbereich Mathematik
der TH Darmstadt
Kantplatz 1 D 61 Darmstadt
Abteilung für Mathematik II
der Universität Ulm
Oberer Eselsberg D 79 Ulm

Eingegangen am 1. September, 1977