КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'77
София . 1980, с. 461—463

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'77
Sofia . 1980, p. 461—463

SUR LA *L*-REGULARITE DES IMAGES HOLOMORPHES DES COMPACTS DE $\mathbb{C}^N$

W. Pleśniak

Résumé. Le but de la note est de présenter le résultat suivant: Soit K un compact polynômialement convexe de $\mathbb{C}^N$ et soit h une application holomorphe ouverte d'un voisinage U de K à valeurs dans $\mathbb{C}^M (M\leqq N)$. Si alors K est L-régulier, c'est-à-dire si la fonction extrémale Φ_K de Siciak est continue dans $\mathbb{C}^N$ où, ce qui est équivalent, si K satisfait à une inégalité du type de Bernstein, il en est de même de l'ensemble $h(K)$.

Le théorème admet des spécifications locales. On peut aussi affaiblir les hypothèses sur h.

Soit K un compact quelconque de $\mathbb{C}^N$ et $C(K)$ l'espace de Banach des fonctions complexes continues sur K, avec la norme uniforme $\|f\|_K=\sup_K|f|$. Pour tout $n=1, 2, \ldots$, soit $P_n(\mathbb{C}^N)$ l'espace des polynômes dans $\mathbb{C}^N$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, de degré $\leqq n$. Désignons par Φ_K la fonction extrémale du compact K, introduite par J. Siciak [7]:

$$\Phi_K(z)=\sup\{|p(z)|^{1/n}: p\in P_n(\mathbb{C}^N), \|p\|_K\leqq 1, n\geqq 1\}, z\in\mathbb{C}^N.$$

La fonction ci-dessus joue un rôle important en plusieurs domaines de l'analyse complexe, en particulier en théorie de l'interpolation et l'approximation polynômiale (voir par exemple [4, 7, 8 et 10]. Si $N=1$ la fonction $\log\Phi_K$ est simplement égale à la fonction de Green de la composante connexe non-bornée de l'ensemble $\mathbb{C}\setminus K$, avec pôle à l'infini [7]. En raison de nombreuses applications des propriétés de la fonction Φ_K il est important de décrire la classe $\mathcal{L}$ des compacts *L-réguliers* de $\mathbb{C}^N$, c'est-à-dire, par définition, la classe des compacts K de $\mathbb{C}^N$ dont la fonction Φ_K est continue dans $\mathbb{C}^N$ (comparer [8]). Dans le cas où $N>1$, on en sait très peu. Quelques critères de la L-régularité se trouvent dans [7, 8 et 1]. Le résultat ci-dessous fournit de nouvelles informations sur la classe $\mathcal{L}$ et une fois appliqué aux résultats déjà connus donne de nouveaux critères de la L-régularité.

Théorème. *Soit K un compact polynômialement convexe de $\mathbb{C}^N$ et h une application ouverte d'un voisinage ouvert U de K, à valeurs dans $\mathbb{C}^M (M\leqq N)$. Si alors K est L-régulier il en est de même de l'ensemble $h(K)$.*

A notre connaissance le théorème ci-dessus n'a pas été connu même dans le cas où $N=M=1$. Sa démonstration repose sur quelques lemmes qui méritent eux-mêmes d'être présentés ici.

Etant donné un ouvert U de $\mathbb{C}^N$ on désigne par $A(U)$ l'espace de Banach des fonctions holomorphes bornées sur U, avec la norme uniforme $\|f\|_U$. Le premier lemme est une version pour les familles des fonctions holomorphes d'un résultat dû à J. Siciak [7] généralisant un théorème de Bernstein—Walsh.

Lemme 1 ([3]). *Pour tout compact K polynômialement convexe contenu dans U, il existe deux constantes $C>0$ et $a \in]0,1[$ indépendantes de n, telles que*

$$\operatorname{dist}_K(f, P_n(\mathbb{C}^N)) \leq C \|f\|_U a^n,$$

pour tout $f \in A(U)$ et $n=1, 2, \ldots$; étant donné un sous-espace vectoriel V de $C(K)$ on pose $\operatorname{dist}_K(f, V) = \inf\{\|f-v\|_K : v \in V\}$.

Désignons par $c(K)$ la $\mathbb{C}^N$-capacité de K (voir [8]):

$$c(K) = \limsup_{|z|\to\infty} [|z| / \limsup_{w\to z} \Phi_K(w)].$$

Dans le cas où $N=1$, $c(K)$ est égal à la capacité logarithmique du compact K. En utilisant un résultat célèbre de B. Josefson [2] montrant que tout ensemble localement $\mathbb{C}^N$-polaire est globalement $\mathbb{C}^N$-polaire, la $\mathbb{C}^N$-polarité étant comprise au sens de la théorie des fonctions plurisousharmoniques, on peut démontrer:

Lemme 2. *Si $c(K)>0$ et h satisfait aux hypothèses du Théorème, alors $c(h(K))>0$.*

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^N$ et K un compact contenu dans U. On supposera que l'application de restriction

$$r_U:\ A(U) \ni f \to f_{|K} \in C(K)$$

est injective. Posons $A(K) = \lim\limits_{U\supset K,\, U \text{ ouvert}} \operatorname{ind} A(U)$.

Soit (H_n) une suite croissante des sous-espaces vectoriels de $A(K)$ e soit (m_n) une suite croissante des nombres réels positifs. Considérons les propriétés suivantes du compact K par raport aux suites (H_n) et (m_n):

Propriété (A). Pour toute fonction $f \in C(K)$, si

$$\limsup_{n\to\infty} [\operatorname{dist}_K(f, H_n)]^{1/m_n} < 1,$$

alors $f \in A(K)$.

Propriété (B). Pour tout $b>1$, il existe un ouvert U contenant K et une constante $C>0$ tels que toute fonction $h \in H_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ appartienne à $A(U)$ et de plus

$$\sup_{z\in U} |h(z)| \leq C b^{m_n} \|h\|_K.$$

Les propriétés (A) et (B) ont été introduites par M. Baouendi et C. Goulaouic [1]. On sait (voir [1, 9 et 5]) que si $\forall a \in]0,1[$ $\Sigma_{n=1}^{\infty} a^{m_n} < \infty$ et

$$\limsup_{n\to\infty} m_{n+1}/m_n < \infty,$$

alors les propriétés (A) et (B) sont équivalentes. On peut aussi démontrer [5] que si le compact K possède la propriété (B) par rapport aux suites (H_n) et

(m_n), alors $\dim H_n = 0(m_n^N)$ quand $n \to \infty$. Dans le cas où $H_n = P_n(\mathbb{C}^N)$ et $m_n = n\,(n=1, 2, \ldots)$ la propriété (B), donc également (A), est équivalente à la propriété de la L-régularité de K. L'implication „L-régularité entraîne propriété (B)" étant évidente, la réciproque résulte d'un théorème de V. Zakharjuta [11] (voir aussi [8]) montrant que la continuité de Φ_K dans K entraîne la continuité de Φ_K dans l'espace $\mathbb{C}^N$ tout entier.

L'équivalence (A)$\Longleftrightarrow$(B) et Lemmes 1 et 2 permettent démontrer le lemme suivant.

Lemme 3. *Avec les hypothèses du Théorème sur K et h, si le compact K possède la propriété* (B) *par rapport aux suites* $(P_n(\mathbb{C}^N))$ *et* (n), *alors il possède* (B) *par rapport aux suites* $H_n = \{p \circ h : p \in P_n(\mathbb{C}^M)\}\,(n=1, 2, \ldots)$ *et* (n).

Les hypothèses sur h dans le Théorème ainsi que dans les Lemmes 2 et 3 apparaissent superflues. Il suffit par exemple de supposer que pour tout ouvert borné V, tel que $K \subset V \subset \bar{V} \subset U$, l'ensemble $h(\bar{V})$ est L-régulier en chaque point $b \in h(K)$ (cela signifie, par définition, que la fonction $\Phi_{h(\bar{V})}$ est continue en b) ce qui a lieu par exemple si $K = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{C}^2$ et $h(z_1, z_2) = (z_1, z_1 z_2)$, h n'étant une application ouverte dans aucun voisinage de K (voir [6]). On peut aussi démontrer des versions locales du Théorème montrant l'invariabilité de la L-régularité en un point $a \in K$ sous les applications holomorphes satisfaisant à des hypothèses convenables [6].

BIBLIOGRAPHIE

1. M. S. Baouendi, C. Goulaouic. Approximation of analytic functions on compact sets and Bernstein's inequality. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **189**, 1974, 251—161.
2. B. Josefson. On the equivalence between locally polar and globally polar sets for plurisubharmonic functions in $\mathbb{C}^N$. *Arkiv för mat.*, **16**, 1978, 109—115.
3. W. Pleśniak. On superposition of quasianalytic functions. *Ann. Polon. Math.*, **26**, 1972, 75—86.
4. W. Pleśniak. Quasianalytic functions in the sense of Bernstein. *Dissertationes Math.*, **147**, 1—65.
5. W. Pleśniak. Remarques sur un généralisation de l'inégalité de S. Bernstein. *C R. Acad. Sci. Paris, Série A*, **284**, 1977, 1211—1213.
6. W. Pleśniak. Invariance of the L-regularity of compact sets in $\mathbb{C}^n$ under holomorphic mappings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **246**, 1978, 373—383.
7. J. Siciak. On some extremal functions and their applications in the theory of analytic functions of several variables. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **105**, 1962, 322—357.
8. J. Siciak. Extremal plurisubharmonic functions in $\mathbb{C}^n$. *Łódź*, 1977, 115—152.
9. J. Siciak. Nguyen Thanh Van. Remarques sur l'approximation polynômiale. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **279**, 1974, 95—98.
10. T. Winiarski. Application of approximation and interpolation methods to the examination of entire functions of n complex variables. *Ann. Polon Math.*, **28**, 1973, 97—121.
11. V. P. Zakharjuta. Fonctions plurisousharmoniques extrémales, polynômes orthogonaux et théorème de Bernstein-Walsh pour les fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. *Ann. Polon. Math.*, **33** (1976), 137—148 (en russe).

Institute of Mathematics
University of Krakow Poland

Received June 25, 1977