КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'77
София . 1980, с. 479—483

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'77
Sofia . 1980, p. 479—483

DIE ALGEBRA DER BERNSTEINOPERATOREN

R. Schnabl

Zusammenfassung. Zur Untersuchung der von den klassischen Bernsteinoperatoren erzeugten Algebra wird eine diese Operatoren umfassende Familie von Operatoren B_α, $\alpha\in K$, definiert und studiert. Mit Hilfe einer explizierten Formel für Produkte der Form $B_\alpha B_\beta$ wird gezeigt, daß die stark-abgeschlossene Hülle der Operatoren B_α, $\alpha\in K$, eine Algebra bilden.

1. Einleitung. In der vorliegenden Arbeit werden Bernsteinoperatoren $B_\alpha : C(W)\to C(W)$, $\alpha\in K$, definiert und untersucht. Diese Operatoren stimmen für spezielle α und $W=[0,1]$ mit den durch die klassischen Bernsteinpolynome auf $[0,1]$ gegebenen Operatoren überein und sind im allgemeinen Fall die Weiterführung einer von G. Felbecker und W. Schempp [2] angegeben Verallgemeinerung der Bernsteinpolynome auf Räumen von Wahrscheinlichkeitsmaßen [3], [4]. Die Operatoren B_α hängen stetig von $\alpha\in K$ ab und ihre stark-abgeschlossene lineare Hülle bildet eine Algebra. Dies wird mit Hilfe einer expliziten Formel für das Produkt von zwei Bernsteinoperatoren gezeigt.

2. Bezeichnungen. Im folgenden bezeichne T einen kompakten Raum, der mindestens zwei Elemente enthält, $C(T)$ den Raum der reellen stetigen Funktionen auf T, und $W=W(T)$ das schwach-Stern topologisierte konvexe Kompaktum der positiven normierten Radonmaße (Wahrscheinlichkeitsmaße) auf T. Für $x\in T$ bezeichne $\delta_x\in W$ das in x konzentrierte Wahrscheinlichkeitsmaß. T ist durch $x\to\delta_x$, $x\in T$, stetig in W eingebettet. Wir identifizieren x mit δ_x. Damit ist $T\subseteq W$. Für $f\in C(T)$ sei $\hat{f}\in C(W)$ die durch $\hat{f}(\xi)=\xi(f)$, $\xi\in W$, gegebene affine Funktion auf W. Für eine natürliche Zahl k bezeichne $P_k(W)$ den Raum der Polynome auf W mit Grad kleiner gleich k, das ist die lineare Hülle in $C(W)$ der Menge $\{\hat{f}_1\hat{f}_2\ldots\hat{f}_k : f_1, f_2,\ldots, f_k\in C(T)\}$. Weiters sei

$$K=\{\alpha\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \alpha_1\geqq\alpha_2\geqq\cdots\geqq 0,\ \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\leqq 1\},$$

$\alpha_\infty=1-\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ und

$$K_n=\{\alpha\in K : \alpha_{n+1}=\alpha_{n+2}=\cdots=0,\ \alpha_\infty=0\}.$$

$L(C(W), C(W))$ bezeichne die Algebra der linearen stetigen Operatoren von $(C(W), \|\ \|_{\sup})$ in $(C(W), \|\ \|\sup)$ versehen mit der Topologie der starken Konvergenz von Operatoren.

3. Definition des Bernsteinoperators B_α.

Definition: *Sei $\alpha \in K$. Für $f \in C(W)$ sei*

(1) $$(B_\alpha f)(\xi) = \int_{T^{\mathbb{N}}} f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_\infty \varsigma)\, d\mu_\xi(x_1, x_2, \ldots), \quad \xi \in W.$$

Dabei ist μ_ξ das durch $\xi \in W$ gegebene Produktmaß auf $T^{\mathbb{N}}$.

Bemerkung: Für $\alpha_1 = 1/n, \ldots, \alpha_n = 1/n$, $\alpha_{n+1} = \cdots = 0$ erhält man den n-ten Bernsteinoperator auf W [3]. Für $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = 0$, $\alpha_\infty = 1$ wird durch (1) der Identitätsoperator auf $C(W)$ gegeben. Für $\alpha \in K_n$ werden durch (1) die von G. Felbecker und W. Schempp [2] angegebenen Operatoren definiert.

Beispiele: *a*) Sei $T = \{1,2\}$. $W(\{1,2\}) \cong [0,1]$, wobei für $\xi \in W$ $\xi(\{1\}) = x \in [0,1]$ gesetzt wird. Dann ist für $\alpha \in K_n$

$$\begin{aligned}(B_\alpha f)(x) &= (1-x)^n f(0) + (1-x)^{n-1} x (f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + \cdots + f(\alpha_n)) + \\ &+ (1-x)^{n-2} x^2 (f(\alpha_1+\alpha_2) + f(\alpha_1+\alpha_3) + \cdots + f(\alpha_{n-1}+\alpha_n)) + \cdots \\ &+ (1-x) x^{n-1} (f(1-\alpha_1) + \cdots + f(1-\alpha_n)) + x^n f(1) \\ &= f(0) + x \sum_{i=1}^{n} (\Delta_{\alpha_i} f)(0) + x^2 \sum_{l<j} (\Delta_{\alpha_i} \Delta_{\alpha_j} f)(0) + \cdots + x^n (\Delta_{\alpha_1} \Delta_{\alpha_2} \ldots \Delta_{\alpha n} f)(0).\end{aligned}$$

Dabei ist $(\Delta_t f)(x) = f(x+t) - f(x)$.

b) Sei $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, 0, 0, \ldots) \in K$. Dann ist für $T = \{1,2\}$

$$(B_\alpha f)(x) = (1-x)^2 f(\alpha_\infty x) + x(1-x)(f(\alpha_\infty x + \alpha_1) + f(\alpha_\infty x + \alpha_2))$$

$+ x^2 f(\alpha_\infty x + \alpha_1 + \alpha_2)$.

e) Sei $T = \{1, 2, \ldots, m\}$, für $\xi \in W(T)$ sei $x_i = \xi(i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $\xi = (x_1, x_2 \ldots, x_m)$ und $\alpha \in K_n$. Dann ist

$$(B_\alpha f)(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_m^{i_n} \sum f(\alpha_{s_1} + \cdots + \alpha_{s_{i_1}},$$

$\alpha_{s_{i_1+1}} + \cdots + \alpha_{s_{i_1+i_2}}, \ldots)$.

Dabei ist die zweite Summe über alle möglichen Zerlegungen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ in m Teilmengen $\{s_1, \ldots, s_{i_1}\}$, $\{s_{i_1+1}, \ldots, s_{i_1+i_2}\}, \ldots$ zu nehmen.

Aus der Definition (1) gewinnt man unmittelbar beziehungsweise durch einfache Umformungen die beiden folgenden Sätze.

Satz 1 (elementare Eigenschaften der Bernsteinoperatoren):

a) $B_\alpha : C(W) \to C(W)$ *ist ein linearer positiver normierter Operator.*

b) $B_\alpha \hat{f} = \hat{f}$, *für alle* $f \in C(T)$.

c) $B_\alpha \widehat{f^2} = s_2(\alpha) \widehat{f^2} + (1 - s_2(\alpha)) \hat{f}^2$, $s_2(\alpha) = \Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2$.

d) $B_\alpha (P_k) \subseteq P_k k = 1, 2, \ldots$, *d. h.* B_α *ist ein polynomialer Operator.*

e) *Ist* $\alpha \in K_n$, *dann ist für alle* $f \in C(W)$ $B_\alpha f \in \overline{P_n}$.

f) $(B_\alpha f)(\delta_x) = f(\delta_x)$ *für alle* $f \in C(W)$ *und für alle* $x \in T$.

Satz 2 (Symmetrieeigenschaften): a) *Sei $\sigma : T_1 \to T_2$ eine stetige Abbildung, $\tilde{\sigma} : W(T_1) \to (T_2)$ die affine stetige Fortsetzung von σ und S: $C(W(T_2)) \to C(W(T_1))$ der durch $\tilde{\sigma}$ induzierte Algebrahomorphismus, $(Sf)(\xi) = f(\tilde{\sigma}(\xi))$ für $f \in C(W(T_2))$ und $\xi \in W(T_1)$. Dann ist das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} C(W(T_2)) & \xrightarrow{B_\alpha} & C(W(T_2)) \\ S\downarrow & & S\downarrow \\ C(W(T_1)) & \xrightarrow{B_\alpha} & C(W(T_1)) \end{array}$$

kommutativ.

b) *Ist* $\sigma: T \to T$ *ein Homöomorphismus und* $f \in C(W(T))$ *S-gerade, d. h.* $Sf=f$, *dann ist auch* $B_\alpha f$ *S-gerade. Ist* f *S-ungerade, d. h.* $Sf=-f$, *dann ist auch* $B_\alpha f$ *S-ungerade.*

4. Abhängigkeit vom Index α. Zur Untersuchung der Abhängigkeit der Operatoren B_α von α bestimmen wir im folgenden für ein Polynom f explizit $B_\alpha f$. Wir beschränken uns auf den Fall $T=\{1, 2\}$ und $W=[0, 1]$. Der allgemeine Fall kann analog behandelt werden und führt auf analoge aber entsprechend umfangreichere Umformungen und Formeln. Der allgemeine Fall kann auch mit Hilfe von Satz 2a) auf den Fall $T=\{1,2\}$ zurückgeführt werden.

Satz 3: *Sei* $\alpha \in K$ *und* n *eine natürliche Zahl.*

a) $B_\alpha x^n = g_n(\alpha)x^n +$ *Terme vom Grad kleiner als* n. *Die erzeugende Funktion der Führungskoeffizienten* g_n *wird durch* $C(\alpha, z) = \Sigma_{n=0}^{\infty} g_n(\alpha) z^n/n!$ $= \exp(\alpha_\infty z) \prod\limits_{n=1} (1+\alpha_n z)$ *gegeben.*

b) $B_\alpha x^n = n! \; \Sigma \, s_1(\alpha)^{i_1} s_2(\alpha)^{i_2} \ldots s_n(\alpha)^{i_n} h_1(x)^{i_1} h_2(x)^{i_2} \ldots h_n(x)^{i_n} / i_1! \; i_2! \ldots i_n!$. *Dabei ist die Summe über alle nicht negativen ganzen Zahlen* $i_1, i_2, \ldots, i_n$ *zu nehmen für die* $i_1 + 2i_2 + \cdots + ni_n = n$. $s_1(\alpha) = 1$, *und* $s_k(\alpha) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^k$ $k \geqq 2$. $h_k(x)$ *ist ein Polynom* k*-ten Grades mit Führungskoeffizienten* $(-1)^{k-1} k^{-1}$ *und durch die erzeugende Funktion*

$$H(x, z) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(x) z^k = \ln(1 - x + xe^z) \tag{2}$$

bestimmt.

Beweis: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (B_\alpha x^n) z^n/n! = B_\alpha \exp(xz) = \int_{T^N} \exp\,(z(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots$

$$+\alpha_\infty \xi)) d\mu_\xi(x_1, x_2, \ldots) = \exp(\alpha_\infty xz) \prod_{n=1}^{\infty} \int_T \exp(\alpha_n x_n z) d\xi(x_n)$$

$$= \exp(\alpha_\infty xz) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x + x \exp(\alpha_n z))$$

$$= \exp(\alpha_\infty xz) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + xz(\exp(\alpha_n z) - 1) z^{-1}).$$

Daraus liest man unmittelbar Behauptung a) ab. Für den Beweis von b) bilden wir nun

$$\ln(B_\alpha \exp(xz)) - \alpha_\infty xz + \sum_{n=1}^{\infty} \ln(l + x(\exp(\alpha_n z) - l)) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n s_n(\alpha) h_n(x).$$

Setzt man nun in dieser Gleichung $\alpha = (1, 0, 0, \ldots)$ und wertet aus, so erhält man die Gleichung (2). Die Behauptung b) folgt nun nach einer bekannten Formel (siehe [1], Seite 269) und Koeffizientenvergleich.

Satz 4: *Die Abbildung* $\alpha \to B_\alpha$ *von* $K \subseteq \mathbb{R}^N$ *in* $L(C(W), C(W))$ *ist stetig and injektiv.*

Beweis: Ist $\alpha \in K$, dann ist wegen $\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \cdots \geqq 0$ und $\Sigma_{n=1}^{\infty} \alpha_n \leqq 1$ $\alpha_n \leqq 1/n$. Für $k \geqq 2$ und $\alpha, \beta \in K$ gilt daher

$$|s_k(\alpha) - s_k(\beta)| \leqq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i| + \sum_{i>n} i^{-k}.$$

Ist nun $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots$ eine Folge in K, und ist $\lim_{n\to\infty} \alpha^{(n)} = \alpha$, dann folgt $\lim_{n\to\infty} \alpha_k^{(n)} = \alpha_k$ für alle $k \in N$ und mit obiger Ungleichung $\lim_{n\to\infty} s_k(\alpha^{(n)}) = s_k(\alpha)$ für alle natürlichen Zahlen k. Aus Satz 3b) folgt nun, daß $\lim_{n\to\infty} B_{\alpha^{(n)}} p = B_\alpha p$ gleichmäßig auf W für alle Polynome p. Daraus und der Positivität und Normiertheit der Bernsteinoperatoren folgt nun die Stetigkeit der Abbildung $\alpha \to B_\alpha$. Die Injektivität folgt aus Satz 3a). $B_\alpha = B_\beta$ impliziert $g_n(\alpha) = g_n(\beta)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $G(\alpha, z) = G(\beta, z)$. Daraus folgt nun unmittelbar $\alpha = \beta$.

Bemerkung: Da K kompakt ist wegen Satz 4 die Menge der Bernsteinoperatoren eine kompakte Teilmenge von $L(C(W), C(W))$.

5. Die Produktformel. Sei $S_m = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \mid x_1 \geqq 0, \ldots, x_m \geqq 0, x_1 + \cdots + x_m = 1\}$. Zu $x \in S_m$ existiert genau ein $\bar{x} \in K_m$, sodaß $\bar{x}_1 = x_{\sigma(1)}, \ldots, \bar{x}_m = x_{\sigma(m)}$ mit einer geigneten Permutation σ von $\{1, \ldots, m\}$. Wir definieren nun für $x \in S_m$ $B_x := B_{\bar{x}}$. Die Abbildung $x \to B_x$ ist eine stetige Abbildung von S_m in $L(C(W), C(W))$. $B_\alpha^{(m)}$ bezeichne den Bernsteinoperator B_α im Fall $T = \{1, \ldots, m\}$, $W \simeq S_m$ (siehe Beispiel c)). Dann gilt die folgende Produktformel.

Satz 5: *Sei* $\alpha \in K$ und $\beta \in K_m$. *Dann gilt* $B_\beta B_\alpha = B_\alpha^{(m)} B_x \mid x = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$. *Dabei wirkt der Operator* $B_\alpha^{(m)}$ *auf die Funktion* $x \to B_x$, $x \in S_m$.

Beweis: Sei zunächst $\alpha \in K_n$. Für $f \in C(W)$ und $\xi \in W$ gilt nun

$$(B_\beta B_\alpha f)(\xi) = B_\beta \int_{T^n} f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) d\mu_\xi(x, \ldots, x_n) = \int_{T^m} \int_{T^n} f(\alpha_1 x_1 + \cdots$$

$$+ \alpha_n x_n) d\mu_{\beta_1 y_1} + \cdots + \beta_m y_m (x_1, \ldots, x_n) d\mu_\xi(y_1, \ldots, y_m) = \int_{T^m} \int_{T^n} f(\alpha_1 x_1 + \cdots$$

$$+ \alpha_n x_n) \sum_{k_1=1}^{m} \cdots \sum_{k_n=1}^{m} \beta_{k_1} \cdots \beta_{k_n} d(\mu_{y_{k_1}}(x_1) \otimes \cdots \otimes \mu_{y_{k_n}}(x_n) d\mu_\xi(y_1, \ldots y_m)$$

$$= \sum_{k_1=1}^{m} \cdots \sum_{k_n=1}^{m} \beta_{k_1} \cdots \beta_{k_n} \int_{T^m} f(\alpha_1 y_{k_1} + \ldots + y_{k_n} \alpha_n) d\mu_\xi(y, \ldots, y_m)$$

$$= \sum_{i_1 + \ldots + i_m = n} \beta_1^{i_1} \cdots \beta_m^{i_m} \Sigma B(\alpha_{s_1} + \cdots + \alpha_{s_{i_1}}, \alpha_{s_{i_1+1}} + \cdots + \alpha_{s_{i_1+i_2}}, \cdots)$$

$$= B_\alpha^{(m)} B_x \mid x = (\beta_1, \ldots \beta_m).$$

Für die letzte Umformung vergleiche man der expliziten Formel im Beispiel c). Für beliebiges $\alpha \in K$ folgt nun daraus, da $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ und $x \to B_x$, $x \in S_m$, stetig ist, durch Approximmation von α und Grenzübergang die Behauptung. Aus Satz 5 folgt nun unmittelbar Satz 6.

Satz 6: *Die Menge der Operatoren* $\mathcal{A}(T) = \{\int_K B_\alpha d\mu(\alpha) \mid \mu \in C(K)^*\}$ *bildet eine starkabgeschlossene Teilalgebra der Algebra* $L(C(W), C(W))$.

LITERATUR

1. A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger. F. G Tricomi. Higher Transcendental Functions Vol. III. New York, 1955.
2. G. Felbecker, W. Schempp. A Generalization of Bohman-Korovkin's Theorem. *Math.*, 122, 1971, 63—70.
3. R. Schnabl. Eine Verallgemeinerung der Bernsteinpolynome. *Math. Ann.*, 179, 1968, 74—82.
4. R. Schnabl. Zum Saturationsproblem der verallgemeinerten Bernsteinoperatoren. Abstract Spaces and Approximation. Basel, 1969.

Techn. Universität Wien
A—1040 Wien, Karlsplatz 13,
Austria

Received September 1, 1977