КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'77
София . 1980, с. 559—560

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'77
Sofia . 1980, p. 559—560

НЕРЕШЕННЫЕ ЗАДАЧИ • UNSOLVED PROBLEMS

Бабаев, М-Б.А. Пусть F и G — множества вещественных функций, определенных на некотором множестве Q n-мерного евклидова пространства E_n.

Рассмотрим приближение функции $f\in F$ функциями из G

$$E_f=\inf_{g\in G}\|f-g\|_{C(Q)}. \tag{1}$$

Функция $g_0\in G$, для которой достигается нижняя грань в (1) назовем наилучшей приближающей функцией для f.

Задача 1. Определить подкласс $G_0\subset G$, каждый элемент которого является наилучшим приближением функций в классе G для некоторой функции $f\in F$ и построить соответствующую приближаемую функцию f.

Замечание. Задача 1 нами решена лишь в некоторых случаях наилучшего равномерного приближения функций многих переменных суммами функций меньшего числа переменных (см., напр., [1]).

Известная проблема Т. Ривлина [2] гласит: „Охарактеризовать n-наборы алгебраических полиномов $\{P_0, P_1,\dots, P_{n-1}\}$, для которых существует функция $f\in C\in[a, b]$, такая, что для нее P_i, $i=0,\dots, n-1$, являются полиномами наилучшего приближения в смысле Чебышева".

Нам кажется, что требование нахождения вышеназванной функции могло бы послужить дальнейшему развитию проблемы Т. Ривлина, а именно:

Задача 2. Построить функцию $f\in C[a, b]$, для которой заданные алгебраические полиномы P_i, $i=0,\dots,n-1$, являются полиномами наилучшего приближения в смысле Чебышева.

Разумеется, постановка этой задачи может быть развита аналогично различным обобщениям проблемы Т. Ривлина [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. М.-Б. А. Бабаев. Об одной задаче теории приближения. Конструктивная теория функции, 77. София, 1980, с. 9—15.
2. T. J. Rivlin. New and unsolved problems, No. 14: Best algebraic approximation. Abstrakte Räume und Approximation, vol. 10, p. 421. Basel — Stuttgart, 1969.
3. B. Brosowski, M. Subrahmanya. On the existence of functions with prescribed best approximations. *J. Approx. theory,* 15, 1975, 143—155.

Michelli, Charles. Prove or disprove. Let $A=(a_{ij})$, $i, j=1,\dots, n$, be a non-negative matrix, $a_{ij}\geqq 0$, with real eigenvalues $\lambda_1\leqq\dots\leqq\lambda_n$. If f is a function such that $f(x)\geqq 0$, $f'(x)\geqq 0,\dots, f^{(n-1)}(x)\geqq 0$, for $\lambda_1\leqq x\leqq\lambda_n$, then $f(A)$ is non-negative?

For A symmetric it is true. (Willoughby, Michelli).

Plesniak, W. Let E be a compact set in $\mathbb{C}^N$ and let $C(E)$ denote the Banach algebra of all complex continuous functions defined on E, with the supremum norm $\| \|_E$. A function $f \in C(E)$ is said to be quasi-analytic on E in the sense of S. N. Bernstein if there is a strictly increasing sequence (n_k) of positive integers and a sequence (p_{n_k}) of polynomials from $\mathbb{C}^N$ to $\mathbb{C}$ with deg $p_{n_k} \leq n_k$ $k=1, 2, \ldots$, such that

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[n_k]{\| f - p_{n_k} \|_E} < 1.$$

Suppose that E is polynomially convex (i. e. $E = \widehat{E} = \{z \in \mathbb{C}^N : |p(z)| \leq |p\|_E$ for all polynomials p from $\mathbb{C}^N$ to $\mathbb{C}\}$ and take a quasi-analytic function f on E such that $f(z) \neq 0$ for all $z \in E$. Must then $1/f$ be quasi analytic on E?

It can be proved that the set $B(E) = \{f \in C(E) : f(z) \neq 0,\ z \in E$, and both f and $1/f$ are quasi-analytic on $E\}$ is residual in the multiplicative group $G(E) = \{f \in C(E) : f(z) \neq 0, z \in E\}$ of the algebra $C(E)$.

Winiarski, T. Let K be the unite circle in $\mathbb{C}$. Denote by H_0 the space of all continuous functions on K analytically prolongable to the unit disk B and by H_1 the subspace of $\varphi(K)$ consisted of functions f analytically prolongable to $\mathbb{C} \setminus K$ such that $f(\infty) = 0$.
Let

$$H = H_0 \oplus H_1 \quad \text{be the direct sum.}$$

Denote by $\|\cdot\|$ the supremum norm on $\varphi(K)$. Let

$$S_0 = \{f \in H_0 : \|f\| = 1\}, \quad S_1 = \{f \in H_1 : \|f\| = 1\}.$$

Is dist $(S_0, S_1) := \inf\{\| f_0 - f_1 \| : f_0 \in S_0,\ f_1 \in S_1\}$ positive?

КОНСТРУКТИВНА ТЕОРИЯ НА ФУНКЦИИТЕ

*

Редактор *Н. Чакалова*
Художник *К. Кънев*
Худ. редактор *Д. Донков*
Техн. редактор *Ал. Иванов*
Коректори *А. А. Захариева, Ж. Тумпарова*

*

Изд. индекс 7004
Дадена за набор на 20. II. 1980
Подписана за печат на 6. IX. 1980 г.
Формат 700×1000×16 Тираж 500
Печатни коли 35 Издателски коли 45,36
Цена 8,46 лв
Код 28 $\frac{9532272711}{2212\text{-}7\text{-}80}$

*

Отпечатана в Печатницата на Издателството
на БАН — 1113 София, ул. „Акад. Г. Бончев"
Поръчка № 210