КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'81
София, 1983, с. 9—13

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
Sofia, 1983, p. 9—13

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ЛОКАЛЬНО РАВНОМЕРНО ВЫПУКЛОЙ ПЕРЕНОРМИРОВКЕ НЕСЕПАРАБЕЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ БАНАХА

Г. А. Александров

Резюме. Исследуется возможность эквивалентной локально равномерно выпуклой перенормировки несепарабельных пространств Банаха, не являющихся слабо компактно порожденными.

Доказана теорема: Пусть в банаховом пространстве X существует сепарабельное подпространство Y такое, что факторпространство X/Y изоморфно $c_0(\Gamma)$ или $l_p(\Gamma)$ $(1\leqq p<\infty)$ для некоторого множества Γ и X допускает плотное линейное вложение в Y. Тогда в пространстве X существует эквивалентная локально равномерно выпуклая норма.

С помощью этой теоремы показана возможность эквивалентной локально равномерно выпуклой перенормировки пространства $QC[0, 1]$ всех вещественных функций с точками разрыва лишь первого рода и пространства, рассмотренный В. Джонсоном (1974) и Д. Линденштраусом (1972) в связи с одной гипотезой в теории слабо компактно порожденных пространств.

Норма в банаховом пространстве X называется локально равномерно выпуклой (ЛРВ), если из условий $x, x_n \in X$, $\|x\|=\|x_n\|=1$, $\lim_n\|x+x_n\|=2$ следует, что $\lim_n\|x-x_n\|=0$.

Локально равномерно выпуклые пространства были введены в [7] и затем исследовались многими авторами. Кадец [2] показал, что каждое сепарабельное банахово пространство допускает эквивалентную ЛРВ норму. Линденштраус [6] и независимо Троянски [3] доказали, что несепарабельное банахово пространство $m(N)$, где N — множество натуральных чисел, не имеет эквивалентной ЛРВ нормы. Таким образом возникла задача о выделении тех пространств Банаха, которые допускают эквивилентную ЛРВ перенормировку. Троянски [8] доказал теорему общего характера о достаточных условиях существования эквивалентной ЛРВ нормы. Приведем эту теорему в той форме, которую придал ей Дистель.

Теорема Троянского ([4, с. 101]). *Пусть X — банахово пространство, обладающее следующими свойствами:*

I) существует линейное ограниченное инъективное отображение $T\colon X\to c_0(\Gamma)$ для некоторого множества Γ;

II) существует семейство линейных ограниченных операторов $S_\lambda\colon X\to X(\lambda\in\Lambda)$, удовлетворяющее следующим требованиям:

1) $\|S_\lambda\|=1$ *и* $S_\lambda(X)$ *сепарабельно для каждого* $\lambda\in\Lambda$,

2) *для каждого* $x \in X$ *отображение* $\lambda \to \| S_\lambda x \|$ *сопоставляет множеству* Λ *элемент пространства* $c_0(\Lambda)$,

3) *каждый ненулевой элемент* $x \in X$ *содержится в замкнутой линейной оболочке* $\cup_{\lambda \in \Lambda(x)} S_\lambda(X)$, *где* $\Lambda(x) = \{\lambda \in \Lambda:\ S_\lambda x \neq 0\}$. *Тогда* X *допускает эквивалентную локально равномерно выпуклую норму*.

Из теоремы Троянского следует, в частности, что каждое слабо компактно порожденное (WCG) банахово пространство допускает эквивалентную ЛРВ норму.

Целью настоящей работы является исследование (с использованием теоремы Троянского) возможности эквивалентной ЛРВ перенормировки некоторых несепарабельных пространств Банаха, не являющихся WCG.

Введем некоторые обозначения и определения.

Пусть X — пространство Банаха, X^* — его сопряженное. Если $A \subset X$, то через $\mathrm{sp}\, A\, (\overline{\mathrm{sp}}\, A)$ мы обозначаем линейную оболочку (замкнутую) множества A. Если Y — подпространство пространства X, то пусть π обозначает естественное отображение X на факторпространство X/Y и если $x \in X$, то $\widehat{x} = \pi(x)$. Через e_γ, $\gamma \in \Gamma$ (Γ — произвольное множество) обозначим функцию из $l_p(\Gamma)$, $1 \leqq p \leqq \infty$ (при $p = \infty$ имеется в виду пространство $c_0(\Gamma)$) такую, что $e_\gamma(\alpha) = 1$, если $\alpha = \gamma$ и $e_\gamma(\alpha) = 0$, если $\alpha \neq \gamma$ и δ_γ — атомарные функционалы на $l_p(\Gamma)$, т. е. для каждого f из $l_p(\Gamma)$, $\delta_\gamma(f) = f(\gamma)$. Напомним, что пространство Банаха обладает Н-свойством, если слабая сходимость на его единичной сфере совпадает с сильной сходимостью.

Будем говорить, что банахово пространство X принадлежит классу $\mathfrak{A}$, если существует такое сепарабельное подпространство $Y \subset X$, что факторпространство X/Y изоморфно $l_p(\Gamma)\,(1 \leqq p \leqq \infty)$ для некоторого множества Γ. Если $X \in \mathfrak{A}$ и $Z = X/Y$, Z изоморфно $l_p(\Gamma)$, то через φ обозначим такой изоморфизм между Z и $l_p(\Gamma)$, что

$$2\|\widehat{x}\| \leqq \|\varphi(\widehat{x})\| \leqq c\|\widehat{x}\|, \quad (\widehat{x} \in X/Y). \tag{1}$$

Определим еще линейное ограниченное отображение пространства X в $l_p(\Gamma)$: $\xi(x) = \varphi(\pi(x))$, $(x \in X)$, и для каждого $\gamma \in \Gamma$ через ψ_γ обозначим элемент пространства X^*, определенный следующим правилом: $\psi_\gamma(x) = \delta_\gamma(\xi(x))$, $(x \in X)$.

Лемма 1. *Пусть* $X \in \mathfrak{A}$ *и* $h \in (1/2, +\infty)$. *Тогда для каждого* $\gamma \in \Gamma$ *существует элемент* $x_\gamma \in X$ *такой, что* $\|x_\gamma\| = h$ *и* $\xi(x_\gamma) = e_\gamma$.

Действительно, $\forall \gamma \in \Gamma$ полагаем $\widehat{x}_\gamma = \varphi^{-1}(e_\gamma)$ и согласно (1) $\|\widehat{x}_\gamma\| < h$, откуда следует существование требуемого элемента $x_\gamma \in X$.

Лемма 2. *Пусть* $X \in \mathfrak{A}$ *и для элемента* $x \in X$ *выполнено*

$$\|\xi(x)\| < \delta. \tag{2}$$

Тогда существует $y \in Y$ *такое, что* $\|x - y\| < \delta/2$.

Действительно, из (1) и (2) получаем, что $\|\widehat{x}\| < \delta/2$, откуда следует существование требуемого элемента $y \in Y$.

Теорема. *Пусть банахово пространство* $X \in \mathfrak{A}$ *и* X *допускает плотное вложение в* Y. *Тогда в пространстве* X *существует эквивалентная ЛРВ норма.*

Доказательство. Пусть отображение P осуществляет плотное вложение X в Y. Пространство Y сепарабельно и, следовательно, существует линейное ограниченное инъективное отображение S пространства Y в c_0. Тогда отображение $T=SP$ является линейным ограниченным инъективным отображением пространства X в c_0. Согласно лемме 1, для $\forall \gamma \in \Gamma$ существует $x_\gamma \in X$, такой, что $\| x_\gamma \|=1$ и $\xi(x_\gamma)=e_\gamma$. Определим линейные отображения $P_\gamma: X \to X$, $(\gamma \in \Gamma)$ следующим образом:

$$P_\gamma x=\psi_\gamma(x)x_\gamma \quad (\forall x \in X).$$

Очевидно, что отображения $P_\gamma\,(\gamma \in \Gamma)$ линейные с сепарабельными (даже одномерными) образами, и так как $\|P_\gamma\| \leqq \|\varphi\|$ для всех $\gamma \in \Gamma$, то семейство $\{P_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ равностепенно ограничено. Заметим, что $\|P_\gamma x\|=|[\xi(x)](\gamma)|$, тогда для каждого $x \in X$ имеем

$$\{\|P_\gamma x\|\}_{\gamma \in \Gamma}=\{|[\xi(x)](\gamma)|\}_{\gamma \in \Gamma} \in c_0(\Gamma).$$

Наконец, покажем, что для каждого ненулевого элемента $x \in X$

$$x \in \overline{\mathrm{sp}}[P(X) \cup (\cup_{\gamma \in \Gamma(x)} P_\gamma(X))], \tag{3}$$

где $\Gamma(x)=\{\gamma \in \Gamma:\ P_\gamma x \neq 0\}$. Заметим, что множество $\Gamma(x)$ не более чем счетное, и обозначим его элементы через $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$. Обозначим $z_n=x-v_n$, где $v_n=\Sigma_{k=1}^{n} P_{\gamma_k}x$. Тогда для каждого $\varepsilon>0$ существует $N=N(\varepsilon)$, такое, что $\|\xi(z_N)\|<\varepsilon$, и согласно лемме 2, существует $y_\varepsilon \in Y$, такой, что $\|z_N-y_\varepsilon\|<\varepsilon/2$. С другой стороны, P — плотное вложение X в Y и, следовательно, существует $h_\varepsilon \in P(X)$, для которого $\|y_\varepsilon-h_\varepsilon\|<\varepsilon/2$. Положим $g_\varepsilon=v_N+h_\varepsilon$. Очевидно, что

$$g_\varepsilon \in \mathrm{sp}[P(X) \cup (\cup_{\gamma \in \Gamma(x)} P_\gamma(X))],$$

и так как

$$\|x-g_\varepsilon\|=\|z_N-h_\varepsilon\| \leqq \|z_N-y_\varepsilon\|+\|y_\varepsilon-h_\varepsilon\|<\varepsilon,$$

то для элемента x выполняется условие (3). Согласно теореме Троянского, пространство X имеет эквивалентную ЛРВ норму. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если банахово пространство удовлетворяет условиям теоремы, то оно не содержит подпространства, изоморфного пространству $m(N)$.*

Действительно, пространство $m(N)$ не имеет эквивалентной ЛРВ нормы [6].

Следствие 2. *Если банахово пространство удовлетворяет условиям теоремы, то оно имеет эквивалентную норму, обладающую H-свойством.*

Это следует из того, что каждая ЛРВ норма обладает H-свойством [4, с. 32].

Приступим к рассмотрению примеров.

Пример 1. Пространство $QC[0,1]$ — это банахово пространство всех вещественных функций f на $[0,1]$, для которых $f(t+0)=f(t)$ и $f(t-0)$ существует для каждого $t \in [0, 1]$, с равномерной нормой.

Предложение 1. *Пространство $QC[0, 1]$ имеет эквивалентную ЛРВ норму.*

Действительно, пространство $QC[0, 1]$ принадлежит классу $\mathfrak{A}$, так как пространство $C[0, 1]$ всех непрерывных функций на $[0,1]$ является подпространством пространства $QC[0, 1]$, и факторпространство $QC[0, 1]/C[0, 1]$ изометрично пространству $c_0([0, 1])$ [6]. Кроме того, существует плотное вложение P пространства $QC[0, 1]$ в $C[0, 1]$, которое можно построить, например, так: каждой функции $f \in QC[0, 1]$ сопоставим функцию

$$(Pf)(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(a_n\cos n\pi t+b_n\sin n\pi t),$$

где a_n, b_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ — коэффициенты Фурье функции f. Следовательно, согласно теореме, пространство $QC[0, 1]$ имеет эквивалентную ЛРВ норму.

Заметим, что пространство $QC[0, 1]$ не является WCG пространством, так как оно не сепарабельно, но его сопряженное имеет счетное тотальное подмножество ([6, Предложение 2.2]).

З а м е ч а н и е. Пусть $QC_0[0, 1]$ есть подпространство пространства $QC[0, 1]$, состоящие из тех функций, которые не имеют разрыва в точке $t=1$. Оказывается, что пространство $QC_0[0, 1]$ изометрично банахову пространству $C(Q)$-всех непрерывных вещественных функций на хаусдорфовом компакте Q — „две стрелки Александрова" (см. [1, с. 145]).

П р и м е р ы 2 и 3. Пусть $\mathfrak{N}=\{N_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ — семейство таких бесконечных подмножеств натурального ряда, что множество $N_{\gamma_1}\cap N_{\gamma_2}$ конечно для каждых $\gamma_1\neq\gamma_2$ и Γ имеет мощность континуума. Такое семейство можно построить, например, так: каждому иррациональному числу $\alpha\in(0.1, 1)$ ставим в соответствие бесконечное множество целых чисел $N_\alpha=\{[\alpha . 10^n]\}_{n=1}^{\infty}$ (здесь $[x]$ обозначает целое число, не превосходящее x). Тогда $\mathfrak{N}=\{N_\alpha : \alpha$. иррациональное из $(0.1, 1)\}$, обладает требуемым свойством. Для каждого $\gamma\in\Gamma$ пусть $\varnothing_\gamma$ — элемент пространства $m(N)$, который является характеристической функцией множества N_γ. Пусть U_0 — линейная оболочка множества $c_0\cup\{\varnothing_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ в $m(N)$. Заметим, что если $x\in U_0$, то x единственным образом представимо в виде

$$x=y+\sum_{i=1}^{m}a_{\gamma_i}\varnothing_{\gamma_i}\quad (y\in c_0 \text{ и } \gamma_i\neq\gamma_j, \text{ если } i\neq j).$$

П р о с т р а н с т в о $m(\mathfrak{N})$: пространство $m(\mathfrak{N})$ является замыканием U_0 в $m(N)$.

П р о с т р а н с т в о U : нормируем U_0 так:

$$|||x|||=|||y+\sum_{i=1}^{m}a_{\gamma_i}\varnothing_{\gamma_i}|||=\max(\|x\|_\infty, (\sum_{i=1}^{m}|a_{\gamma_i}|^2)^{1/2}),$$

где $\|\cdot\|_\infty$ — обычная норма в $m(N)$. Пространство U является пополнением нормированного пространства U_0 в норме $|||\cdot|||$.

П р е д л о ж е н и е 2. *Пространства $m(\mathfrak{N})$ и U имеют эквивалентную ЛРВ норму.*

Действительно, пространства $m(\mathfrak{N})$ и U принадлежат классу $\mathfrak{N}$, так как по построению они содержат c_0, и факторпространства $m(\mathfrak{N})/c_0$ и U/c_0 изометричны соответственно $c_0(\Gamma)$ и $l_2(\Gamma)$ [5]. Пространства $m(\mathfrak{N})$ и U допускают плотное вложение в c_0. Действительно, плотным вложением, например, является отображение, которое каждому x из $m(\mathfrak{N})$ или U ставит в соответствие последовательность $\{x(n)/n\}_{n=1}^{\infty}$ из c_0. Тогда из теоремы следует, что пространства $m(\mathfrak{N})$ и U имеют эквивалентную ЛРВ норму.

Пространства $m(\mathfrak{N})$ и U впервые были рассмотрены Джонсоном и Линденштраусом [5] в связи с одной гипотезой в теории WCG пространств и для них, в частности, показано, что не является WCG пространствами.

Следствие 3. *Пространства* $QC[0, 1]$, $m(\mathfrak{N})$ *и* U *не содержат* $m(N)$.

Следствие 4. *Пространства* $QC[0,1]$, $m(\mathfrak{N})$ *и* U *имеют эквивалентную норму, обладающую H-свойством.*

В заключение автор выражает благодарность М. И. Кадецу за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Архангельский, В. И. Пономарев. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. Москва, 1974.
2. М. И. Кадец. О пространствах, изоморфных локально равномерно выпуклым подпространствам. *Изв. ВУЗ, Матем.*, 1959, № 6, 51—57.
3. С. Л. Троянски. Об эквивалентных нормах и минимальных системах в несепарабельных пространствах Банаха. *Studia Math.*, 43, 1972, 125—138.
4. J. Diestel. Geometry of Banach spaces — selected topics. *Lect. Notes Math.*, 485, 1975, p. 282.
5. W. B. Johnson, J. Lindenstrauss. Some remarks on weakly compactly generated Banach spaces. *Israel J. Math.*, 17, 1974, 219—230.
6. J. Lindenstrauss. Weakly compact sets — their topological properties and Banach spaces they generate. *Ann. Math. Studies*, 69, 1972, 235—273.
7. A. R. Lovaglia. Locally uniformly convex Banach spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 78, 1955, 225—238.
8. S. L. Troyanski. On locally uniformly convex and differentiable norms in certain nonseparable Banach spaces. *Studia Math.*, 37, 1971, 173—180.

Висш педагогически институт
Шумен България

Получено 24 июня 1981 г.