КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'81
София, 1983, с. 14—20

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
Sofia, 1983, p. 14—20

О ПРИБЛИЖЕНИИ СУММАМИ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ФУНКЦИЙ МЕНЬШЕГО ЧИСЛА ПЕРЕМЕННЫХ

М. Б. А. Бабаев

Резюме. Введено так называемое раздельное приближение функций многих переменных суммами произведений функций меньшего числа переменных в пространствах ограниченных и непрерывных функций. Установлены необходимые, а также достаточные условия для экстремальности элемента. В частности, из полученных результатов следуют необходимые и достаточные условия для наилучших приближающих функций в обычном приближении функций многих переменных суммами произведений функций меньшего числа переменных.

1. Обозначим через $M(Q)$ пространство вещественных ограниченных функций $f=f(x)$, $x=(x_1,\ldots,x_n)$, определенных на некотором множестве Q n-мерного евклидова пространства $R^n=R(x_1,\ldots,x_n)$ с нормой $\|f\|_{M(Q)}=\sup_{x\in Q}|f(x)|$. Зафиксируем натуральные числа m и k. Рассмотрим совокупность ограниченных функций $\{\varphi_{ij}\}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,k}$ из mk функций $\varphi_{ij}=\varphi_{ij}(\tau_{ij})$, зависящих от некоторых групп переменных $\tau_{ij}\subset\{x_1,\ldots,x_n\}$ и определенных на проекциях множества Q на соответствующие пространства $R(\tau_{ij})$. Каждому такому набору функций $\{\varphi_{ij}\}$ сопоставим функцию $\sum_{i=1}^m\prod_{j=1}^k\varphi_{ij}(\tau_{ij})$. Рассмотрим конкретную сумму произведений $\eta^0:\stackrel{df}{=}\sum_{i=1}^m\prod_{j=1}^k\varphi_{ij}^0(\tau_{ij})$. Обозначим $\overline{m}=\{1,\ldots,m\}$, $\overline{k}=\{1,\ldots,k\}$, пусть $\overline{m}\times\overline{k}$ есть множество всех пар (i,j), $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,k}$ и рассмотрим непустое множество $A\subset\overline{m}\times\overline{k}$. Введем раздельное приближение

$$E_{f,M}^A=\inf\{\|f-\sum_{i=1}^m\prod_{j=1}^k\varphi_{ij}^A\|_{M(Q)}:\sum_{(i,j)\in A}\prod\varphi_{ij}\};\tag{1}$$

здесь нижняя грань берется по всем наборам ограниченных функций $\{\varphi_{ij}\}$, $(i,j)\in A$, а

$$\varphi_{ij}^A=\begin{cases}\varphi_{ij}, & (i,j)\in A\\ \varphi_{ij}^0, & (i,j)\in\overline{m}\times\overline{k}\setminus A.\end{cases}\tag{2}$$

Функцию, для которой достигается нижняя грань в приближении (1), будем называть наилучшей приближающей. В частности, при $A=\overline{m}\times\overline{k}$ из (1) получается приближение суммами произведений функций меньшего числа переменных

(3) $$A_{f,M}^{\overline{m}\times\overline{k}}:=A_{f,M}=\inf\{\|f-\sum_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{k}\varphi_{ij}\|_{M(Q)}:\sum_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{k}\varphi_{ij}\}.$$

При $k=1$ из (3) получается приближение суммами функций меньшего числа переменных, а при $m=1$ приближение произведениями функций меньшего числа переменных.

Иногда учитывая структуру приближаемой функции, имеет смысл рассмотреть также приближение

$$\mathscr{E}_{f,M}^{A}=\min\{E_{f,M}^{A}:\{\tau_{ij}\}\}.$$

Поскольку множество разных наборов $\{\tau_{ij}\}$ конечное, при умении вычисления $E_{f,M}^{A}$ нахождение наилучшего приближения $\mathscr{E}_{f,M}^{A}$ производится перебором. В дальнейшем речь будет идти лишь о приближении (1).

Введем в рассмотрение множество

$$\Phi_{\varepsilon,\eta^0}^{M}=\{x\in Q:\|f-\eta^0\|_{M(Q)}-\varepsilon\leqq|[f-\eta^0](x)|\leqq\|f-\eta^0\|_{M(Q)}\}.$$

Для каждого $j_0\in\overline{k}$ определим множеството $A_0=\{(i,j_0)\subset A\}$ и разделим $\overline{m}=\{1,\ldots,m\}$ на две части $\overline{m}=I_1^0\cup I_2^0$, где

$$I_1^0=\{i\in\overline{m}:(i,j_0)\in A_0\};\quad I_2^0=\{i\in\overline{m}:(i,j_0)\notin A_0\}.$$

Теорема 1. *Для того, чтобы функция* $\eta^0=\sum_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{k}\varphi_{ij}^{0}(\tau_{ij})$ *была наилучшей приближающей в приближении* $E_{f,M}^{A}$, *необходимо, чтобы для произвольного набора функций* $\{\varphi_{ij}\}$, $(i,\ j_0)\in A_0$, $j_0\in\overline{k}$, $\forall\ \varepsilon>0$, $\forall\delta>0$- $\exists x'\in\Phi_{\varepsilon,\eta^{0}}^{M}$, *такая, что*

(4) $$[\eta^0-f](x')\left[\eta^0-\sum_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{k}\varphi_{ij}^{A_0}\right](x')\leqq\delta,$$

где

(5) $$\varphi_{ij}^{A_0}=\begin{cases}\varphi_{ij_0}, & (i,j_0)\in A_0,\\ \varphi_{i,j}^{0}, & (i,j)\in\overline{m}\times\overline{k}\setminus A_0.\end{cases}$$

Доказательство. Учитывая, что в случае $E_{f,M}^{A}=0$ условие (4) выполяется тривиально, будем считать $E_{f,M}^{A}>0$. Разобъем множество Q на два подмножества $\Phi_{\varepsilon,\eta^0}^{M}$ и $R=Q\setminus\Phi_{\varepsilon,\eta^0}^{M}$. На множестве R имеем

$$|[f-\eta^0](x)|<E_{f,M}^{A}-\varepsilon\Rightarrow\|f-\eta^0\|_{M(R)}\leqq E_{f,M}^{A}-\varepsilon=:\mu^*<E_{f,M}^{A}.$$

Пусть для некоторого набора ограниченных функций $\{\varphi_{ij_0}^{*}\}$, $(i,j_0)\in A_0$ $\exists\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ такие, что для всех $x\in\Phi_{\varepsilon,\eta^0}^{M}$

$$[\eta^0-f](x)\left[\eta^0-\sum_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{k}\varphi_{ij}^{A_0}\right](x)>\delta,$$

где

$$\varphi_{ij_0}^{A_0}=\begin{cases}\varphi_{ij_0}^{*}, & (i,j_0)\in A_0,\\ \varphi_{ij}^{0}, & (i,j)\in\overline{m}\times\overline{k}\setminus A_0.\end{cases}$$

Пусть $\lambda>0$ — конечное число. Введем функции

$$\bar{\varphi}_{ij}^{A_0}=\begin{cases}(1-\lambda)\varphi_{ij_0}^0+\lambda\varphi_{ij_0}^*, & (i,j_0)\in A_0,\\ \varphi_{ij}^0, & (i,j)\in \overline{m}\times\overline{k}\setminus A_0.\end{cases} \tag{6}$$

Обозначим $\bar{\eta}^0=\Sigma_{i=1}^m\Pi_{j=1}^k\bar{\varphi}_{ij}^{A_0}$. Тогда

$$|f-\bar{\eta}^0|=|f-\sum_{i\in I_1^0}[\lambda\varphi_{ij_0}^*+(1-\lambda)\varphi_{ij_0}^0]\prod_{j\neq j_0}\varphi_{ij_0}^0-\sum_{i\in I_2^0}\varphi_{ij_0}^0\prod_{j\neq j_0}\varphi_{ij}^0|$$

$$=|f-\eta^0+\lambda\sum_{i\in I_1^0}\varphi_{ij_0}^0\prod_{j\neq j_0}\varphi_{ij}^0-\lambda\sum_{i\in I_1^0}\varphi_{ij_0}^*\prod_{i\neq j_0}\varphi_{ij}^0|$$

$$=|f-\eta^0+\lambda(\eta^0-\sum_{i=1}^m\prod_{j=1}^k\varphi_{ij}^{A_0})|.$$

Поэтому на множестве R имеем $[|f-\Sigma_{i=1}^m\Pi_{j=1}^k\bar{\varphi}_{ij}^{A_0}](x)\leq\mu^*+\lambda D$, где $D=\sup_{x\in Q}|[\eta^0-\Sigma_{i=1}^m\Pi_{j=1}^k\varphi_{ij}^{A_0}](x)|$ —конечное число. Выбирая $\lambda<\varepsilon/D$, получаем

$$\|f-\bar{\eta}^0\|_{M(R)}\leq\mu^*+\lambda D<E_{f,M}^A. \tag{7}$$

На множестве $\Phi_{\varepsilon,\eta^0}^M$ имеем

$$(f-\bar{\eta}^0)^2=(f-\eta^0)^2-2\lambda(\eta^0-f)(\eta^0-\sum_{i=1}^m\prod_{j=1}^k\varphi_{ij}^{A_0})$$

$$+\lambda^2(\eta^0-\sum_{i=1}^m\prod_{j=1}^k\varphi_{ij}^{A_0})^2\leq(E_{f,M}^A)^2-2\lambda\delta+\lambda^2D^2,$$

откуда при $\lambda\in(0,2\delta/D^2)$

$$\sup\{|[f-\Sigma\Pi\bar{\varphi}_{ij}^0](x)|:x\in\Phi_{\varepsilon,\eta^0}^M\}<\varepsilon_{f,M}^A \tag{8}$$

(т. е. число λ окончательно определяется из условия $0<\lambda<\min(\varepsilon/D,2\delta/D^2)$). Из соотношений (7)—(8) получаем

$$\|f-\sum_{i=1}^m\prod_{j=1}^k\bar{\varphi}_{ij}^{A_0}\|_{M(Q)}=\max(\|f-\sum_{i=1}^m\prod_{j=1}^k\bar{\varphi}_{ij}^{A_0}\|_{M(R)},\ \|f-\sum_{i=1}^m\prod_{j=1}^k\bar{\varphi}_{ij}^{A_0}\|_{M(\Phi_{\varepsilon,\eta^0}^M)})<E_{f,M}^A,$$

что противоречит определению $E_{f,M}^A$. Теорема 1 доказана.

Приведем еще одно необходимое условие для экстремального элемента.

Теорема 2. *Для того, чтобы функция* $\eta^0=\Sigma_{i=1}^m\Pi_{j=1}^k\varphi_{ij}^0$ *была наилучшей приближающей в приближении* $E_{f,M}^A$, *необходимо, чтобы для произвольной суммы* $\sum_{i\in I_1^0}\varphi_{ij_0}$, $j_0\in k$, $\forall\varepsilon>0$, $\forall\delta>0$, $\exists x'\in\Phi_{\varepsilon,\eta^0}^M$ *такая, что*

$$[f-\eta^0](x')[\sum_{i\in I_1^0}\prod_{j=1}^k\varphi_{ij}^{A_0}](x')\leq\delta,$$

где функции $\varphi_{ij}^{A_0}$ *определены в* (5).

Доказательство проводится от противного аналогично доказательству теоремы 1; функции $\bar{\varphi}_{ij}^{A_0}$, построенные в доказательстве теоремы 1 в (6), теперь определяются по формулам

$$\bar{\varphi}_{ij}^{A_0}=\begin{cases}\varphi_{ij_0}^0+\lambda\varphi_{ij_0}^*, & (i,j_0)\in A_0,\\ \varphi_{ij}^0, & (i,j)\in \bar{m}\times\bar{k}\setminus A_0.\end{cases}$$

Теорема 3. *Для того, чтобы* $\eta^0=\Sigma_{i=1}^m\prod_{j=1}^k\varphi_{ij}^0(\tau_{ij})$ *была наилучшей приближающей в приближении* $E_{f,M}^A$, *достаточно, чтобы для произвольного набора ограниченных функций* $\{\varphi_{ij}\}$, $(i,j)\in A$, $\forall\varepsilon>0$ *существовала точка* $x'\in\Phi_{\varepsilon,\eta^0}^M$, *такая, что*

$$(9)\qquad [\eta^0-f](x')[\sum_{i=1}^m(\prod_{j=1}^k\varphi_{ij}^0-\prod_{j=1}^k\varphi_{ij}^A)](x')\leqq 0,$$

где функции φ_{ij}^A *определены в* (2).

Доказательство. Рассмотрим произвольную $\Sigma_{(i,j)\in A}\Pi\varphi_{ij}$ и составим сумму произведений $\Sigma_{i=1}^m\Pi_{j=1}^k\varphi_{ij}^A$, где φ_{ij}^A определяются по формулам (2). Для $\forall x\in Q$ имеем

$$(10)\qquad |[f-\sum_{i=1}^m\prod_{j=1}^k\varphi_{ij}^A](x)|=|[\eta^0-f](x)-[\sum_{i=1}^m(\prod_{j=1}^k\varphi_{ij}^0-\prod_{j=1}^k\varphi_{ij}^A)](x)|.$$

По условию существует точка $x'\in\Phi_{\varepsilon,\eta^0}^M$, в которой выражения η^0-f и $\Sigma_{i=1}^m(\Pi_{j=1}^k\varphi_{ij}^0-\Pi_{j=1}^k\varphi_{ij}^A)$ имеют разные знаки. Поэтому из (10) получаем

$$|[f-\sum_{i=1}^m\prod_{j=1}^k\varphi_{ij}^A](x')|=|[\eta^0-f](x')|+|[\sum_{i=1}^m(\prod_{j=1}^k\varphi_{ij}^0-\prod_{j=1}^k\varphi_{ij}^A)]|$$
$$\geqq|[f-\eta^0](x')|\geqq\|f-\eta^0\|_{M(Q)}-\varepsilon.$$

Последнее означает, что никакая функция $\Sigma_{i=1}^m\Pi_{j=1}^k\varphi_{ij}^A\neq\eta^0$ не может дать функции f приближение, лучшее, чем η^0. Теорема 3 доказана.

Из теоремы 1 — 3 получается

Следствие 1. *Для того, чтобы* $\eta^0=\Sigma_{i=1}^m\Pi_{j=1}^k\varphi_{ij}^0$ *была наилучшей приближающей в обычном приближении* $E_{f,M}$ *суммами произведений функций меньшего числа переменных:*

a) *необходимо, чтобы для произвольной суммы* $\Sigma_{i=1}^m\varphi_{ij_0}(\tau_{ij_0})$, $j_0\in\bar{k}$, $\forall\varepsilon>0$, $\forall\delta>0$, $\exists x'\in\Phi_{\varepsilon,\eta_0}^M$, *для которой*

$$K(x'):=[\eta^0-f](x')[\sum_{i=1}^m(\varphi_{ij_0}^0-\varphi_{ij_0})\prod_{j\neq j_0}\varphi_{ij}^0](x')\leqq\delta;$$

b) *необходимо, чтобы для произвольной суммы* $\Sigma_{i=1}^m\varphi_{ij_0}(\tau_{ij_0})$, $j_0\in\bar{k}$, $\forall\varepsilon>0$, $\forall\delta>0$, $\exists x''\in\Phi_{\varepsilon,\eta_0}^M$, *для которой*

$$r(x''):=[f-\eta^0](x'')[\sum_{i=1}^m\varphi_{ij0}\prod_{j\neq j_0}\varphi_{ij}^0](x'')\leqq\delta;$$

c) *достаточно, чтобы для произвольной суммы произведений* $\eta\overset{\mathrm{df}}{:=}\Sigma_{i=1}^m\Pi_{j=1}^k\varphi_{ij}$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists x'''\in\Phi_{\varepsilon,\eta^0}^M$, *такая, что*

$$(11)\qquad [\eta^0-f](x''')[\eta^0-\eta](x''')\leqq 0.$$

Замечание. В теоремах 1 — 3 условие ограниченности функций φ_{ij} можно расслабить до условия ограниченности всех $\Sigma_{i=1}^{m} \Pi_{j=1}^{k} \varphi_{ij}$, участвующих в приближении $E_{f,M}^{A}$.

2. Теперь приведем условия для экстремального элемента в пространстве C. Пусть функции f, φ_{ij}, $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,k}$ непрерывные, множество Q ограниченное, замкнутое, норма определяется через $\|f\|_{C(Q)}=\max_{x\in Q}|f(x)|$, а наилучшее приближение

$$E_{f,C}^{A}=\inf\{\|f-\sum_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{k}\varphi_{ij}^{A}\|_{C(Q)}:\{\sum_{(i,j)\in A}\Pi\,\varphi_{ij}\}\},$$

где φ_{ij}^{A} определены в (2). Рассмотрим множество

$$\Phi_{0,\eta^0}^{C}=\{x\in Q:|[f-\eta^0](x)|=\|f-\eta^0\|_{C(Q)}\}.$$

Теорема 4. *Для того, чтобы функция* $\eta^0=\Sigma_{i=1}^{m}\Pi_{j=1}^{k}\varphi_{ij}^{0}(\tau_{ij})$ *была наилучшей приближающей в приближении* $E_{f,C}^{A}$:

а) *необходимо, чтобы* $\forall j_0\in\overline{k}$ *для произвольной суммы произведений* $\eta^{A_0}=\Sigma_{i=1}^{m}\Pi_{j=1}^{k}\varphi_{ij}^{A_0}$, *где функции* $\varphi_{ij}^{A_0}$ *определены в* (5), $\exists x'\in\Phi_{0,\eta^0}^{C}$, *такая, что*

$$\Lambda(x'):=[\eta^0-f](x')[\eta^0-\eta^{A_0}](x')\leq 0;$$

b) *необходимо, чтобы для произвольной суммы* $\Sigma_{i\in I_1^0}\varphi_{ij_0}$, $j_0\in\overline{k}$, $\exists x''\in\Phi_{0,\eta^0}^{C}$, *такая, что*

$$[f-\eta^0](x'')[\sum_{i\in I_1^0}\prod_{j=1}^{k}\varphi_{ij}^{A_0}](x'')\leq 0;$$

c) *достаточно, чтобы для произвольной функции* $\Sigma_{(i,j)\in A}\Pi\varphi_{ij}$, $\exists x'''\in\Phi_{0,\eta^0}^{C}$, *для которой имеет место*

$$[\eta^0-f](x''')[\sum_{i=1}^{m}(\prod_{j=1}^{k}\varphi_{ij}^{0}-\prod_{j=1}^{k}\varphi_{ij}^{0})](x''')\leq 0,$$

где функции φ_{ij}^{A} *определены в* (2).

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $E_{f,C}^{A}>0$.

а) Пусть для некоторой непрерывной $\Sigma_{(i,j)\in A_0}\Pi\varphi_{ij}^{**}$ во всех точках $x\in\Phi_{0,\eta^0}^{C}$ имеет место

$$[\eta^0-f](x)[\eta^0-\sum_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{k}\varphi_{ij}^{A_0}](x)\geq\mu>0,$$

где

$$\varphi_{ij}^{A_0}=\begin{cases}\varphi_{ij}^{**}, & (i,j)\in A_0,\\ \varphi_{ij}^{0}, & (i,j)\in\overline{m}\times\overline{k}\setminus A_0.\end{cases}$$

Разобъем множество Q на два подмножества $Q=G\cup R$, где $G:\{x\in Q:\Lambda(x)>\mu/2\}$, $R=Q\setminus G$. Ясно, что $\Phi_{0,\eta^0}^{C}\in G$, G — открыто (в силу непрерывности) и R замкнуто. Поскольку множество R не содержит точек из Φ_{0,η^0}^{C}, имеем $\|f-\eta^0\|_{C(R)}:=\mu^*<E_f$. Введем непрерывные функции

$$(12)\qquad \bar{\varphi}_{ij}^{A_0}(\tau_{ij})=\begin{cases}(1-\lambda)\varphi_{ij}^0+\lambda\varphi_{ij}^{**}, & (i,j)\in A_0,\ \lambda>0,\\ \varphi_{ij}^0, & (i,j)\in \overline{m}\times\overline{k}\setminus A_0.\end{cases}$$

Как и в доказательстве теоремы 1, устанавливается, что $\|f-\Sigma_{i=1}^m \Pi_{j=1}^k \bar{\varphi}_{ij}^0\|_{C(R)}<E_f$, и на множестве G

$$[f-\sum_{i=1}^m\prod_{j=1}^k \bar{\varphi}_{ij}^0]^2\leq(E_{f,C}^A)^2-\lambda\mu+\lambda^2D^2\Rightarrow\|f-\sum_{i=1}^m\prod_{j=1}^k\varphi_{ij}^0\|_{C(G)}<E_f.$$

Доказательство завершается аналогично доказательству теоремы 1, число λ берется из промежутка $(0, \min((E_f-\mu)/2, \mu/D^2))$.

Доказательство утверждения пункта b) проводится аналогично, вместо функций (12) теперь используются функции

$$\bar{\varphi}_{ij}^{A_0}(\tau_{ij})=\begin{cases}\varphi_{ij}^0+\lambda\varphi_{ij}^{**}, & (i,j)\in A_0,\\ \varphi_{ij}^0, & (i,j)\in\overline{m}\times\overline{k}\setminus A_0.\end{cases}$$

c) Доказывается аналогично теореме 3.

Следствие 2. *Для того, чтобы* $\eta^0=\Sigma_{i=1}^m \Pi_{j=1}^k \varphi_{ij}^0$ *была наилучшей приближающей в обычном приближении* $E_{f,C}$ *суммами произведений функций меньшего числа переменных:*

a) *необходимо, чтобы* $\forall j_0\in\bar{k}, \forall\Sigma_{i=1}^m \varphi_{ij_0}$, $\exists x'\in\Phi_{0,\eta^0}^C$, *такая, что* $K(x')\leq 0$;

b) *необходимо, чтобы* $\forall j_0\in\bar{k}, \forall\Sigma_{i=1}^m \varphi_{ij_0}$, $\exists x''\in\Phi_{0,\eta^0}^C$, *для которой* $r(x'')\leq 0$;

c) *достаточно, чтобы* $\forall\eta:=\Sigma_{i=1}^m \Pi_{j=1}^k \varphi_{ij}$, $\exists x'''\in\Phi_{0,\eta^0}^C$, *такая, что* $[\eta^0-f](x''')[\eta^0-\eta](x''')\leq 0$.

Из приведенных выше результатов получаются следующие критерии для экстремального элемента в приближении:

$$E_{f,C}^{A_0}=\inf\{\|f-\sum_{i=1}^m\prod_{j=1}^k\varphi_{ij}^{A_0}\|_{C(Q)}:\sum_{i\in I_1^0}\varphi_{ij_0}\},$$

где функции $\varphi_{ij}^{A_0}$ определены в (5).

Следствие 3. *Для того, чтобы функция* $\eta^0=\Sigma_{i=1}^m \Pi_{j=1}^k \varphi_{ij}^0$ *была наилучшей приближающей в приближении* $E_{f,C}^{A_0}$, *выполнение каждого из следующих двух условий является необходимым и достаточным: для произвольного набора функций* $\{\varphi_{ij_0}\}$, $(i, j_0)\in A_0$,

1) $\exists x'\in\Phi_{0,\eta^0}^C$ *такая, что* $[\eta^0-f](x')[\eta^0-\Sigma_{i=1}^m\Pi_{j=1}^k\varphi_{ij}^{A_0}](x')\leq 0$;

2) $\exists x''\in\Phi_{0,\eta^0}^C$, *для которой* $[f-\eta^0](x'')[\sum_{i\in I_1^0}\varphi_{ij_0}\prod_{j\neq j_0}\varphi_{ij}^0](x'')\leq 0$.

Для доказательства достаточности условия пункта 2) функции φ_{ij} $(i, j_0)\in A_0$, надо записать в виде $\varphi_{ij_0}=\varphi_{ij_0}^0+\varphi_{ij_0}^*$, определить $\bar{\eta}^0=\Sigma_{i=1}^m\Pi_{j=1}^k\varphi_{ij}^{A_0^0}$ где $\varphi_{ij}^{A_0}$ определены в (5), и пользуясь равенством

$$f-\bar{\eta}_0=f-\eta^0-\sum_{i\in I_1^0}\varphi_{ij_0}^*\prod_{j\neq j_0}\varphi_{ij}^0,$$

действовать как в доказательстве теоремы 3.

В случае $n=2, m=k=1, \varphi_{11}=\varphi(x)\psi(y)$ из пункта b) следствия 2 и из пункта 2) следствия 3 получаются соответствующие результаты из статьи [1].

Из этого следствия в случае $k=1$, $A^0:\{(i,\ 1),\ i=\overline{1,\ m}\}$ получается критерий для экстремального элемента в приближении функций многих переменных суммами функций меньшего числа переменных

$$E\,[f, \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(\tau_i), Q]_{C(Q)}=\inf\{\,\|f-\sum_{i=1}^{m}\varphi_i(\tau_i)\|_{C(Q)}:\sum_{i=1}^{m}\varphi_i\},$$

где $\tau_{i1}:=\tau_i$

Следствие 4. *Для того, чтобы сумма* $\eta^0=\Sigma_{i=1}^m \varphi_i^0(\tau_i)$ *была наилучшей приближающей в приближении* $E\,[f.\,\Sigma\varphi_i, Q]_{C(Q)}$, *выполнение каждого из следующих двух условий является необходимым и достаточным:*

1) $\exists x'\in\Phi_{0,\eta^0}^C$ *такая, что* $[\eta^0-f](x')\,[\Sigma_{i=1}^m(\varphi_i^0-\varphi_i)](x')\leq 0$;

2) $\exists x''\in\Phi_{0,\eta^0}^C$, *для которой* $[f-\eta^0](x'')\,[\Sigma_{i=1}^m\varphi_i](x'')\leq 0.$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Поспелов. О приближении функций нескольких переменных произведениями функций одного переменного. Москва, 1978 (препринт).

Институт математики и механики АН Азерб. ССР
Баку-105

Получено 3 июня 1981 г