КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'81
София, 1983, с. 21—27

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
Sofia, 1983, p. 21—27

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ

В. М. Бадков

Резюме. Сообщение посвящено асимптотическим свойствам многочленов, ортогональных на отрезке или на окружности, и тригонометрических ортогональных полиномов. В частности, приводятся равномерные асимптотические представления через многочлены Якоби многочленов, ортогональных на окружности с весом обобщенного якобиева типа. Из этих представлений легко вытекают соответствующие результаты для многочленов, ортогональных на отрезке (в том числе известные результаты С. Н. Бернштейна), и тригонометрических ортогональных полиномов. Усиливается оценка Я. Л. Геронимуса многочленов, ортогональных на окружности. Оценивается порядок наилучшего приближения функции Сегё алгебраическими многочленами степени n в пространстве L^2_φ на окружности в случае весов φ со степенно-логарифмическими особенностями.

1. Соотношения между различными типами ортогональных полиномов. Всюду ниже $\boldsymbol{C}$ — множество всех комплексных чисел, $\boldsymbol{R}=(-\infty, \infty)$, $\boldsymbol{N}=\{1, 2, 3, \ldots\}$, $\boldsymbol{Z}_+=\{0, 1, 2, \ldots\}$; $\alpha(t)$ $(-1\leq t\leq 1)$ и $\sigma(\tau)$ $(0\leq\tau\leq 2\pi)$ — ограниченные неубывающие функции с бесконечными множествами значений; $p_{\alpha, n}(t)=k_{\alpha, n}t^n+\cdots$ $(\deg p_{\alpha, n}=n,\ n\in\boldsymbol{Z}_+)$ — система многочленов, ортонормированная на отрезке $[-1, 1]$ в следующем смысле:

$$\int_{-1}^{1} p_{\alpha, m}(t)\, p_{\alpha, n}(t) d\alpha(t)=\delta_{m, n} \quad (m,\ n\in\boldsymbol{Z}_+),$$

$\varphi_{\sigma, n}(z)=\varkappa_{\sigma, n}z^n+\cdots$ $(\deg\varphi_{\sigma, n}=n,\ \varkappa_{\sigma, n}>0,\ n\in\boldsymbol{Z}_+)$ — система многочленов, ортонормированная на окружности $|z|=1$ относительно $d\sigma(\tau)$:

$$(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}\varphi_{\sigma, m}(e^{i\tau})\overline{\varphi_{\sigma, n}(e^{i\tau})}\, d\sigma(\tau)=\delta_{m, n} \quad (m, n\in\boldsymbol{Z}_+).$$

По известной формуле Сегё [1], [2] для всех $n\in\boldsymbol{Z}_+$ и $z\in\boldsymbol{C}$

$$p_{\alpha, n}((z+1/z)/2)=\{2\pi[1+\varphi_{\sigma, 2n}(0)/\varkappa_{\sigma, 2n}]\}^{-1/2}[\varphi_{\sigma, 2n}(z)+\varphi^*_{\sigma, 2n}(z)]z^{-n}, \tag{1}$$

где $\alpha(-1)=0,\ \sigma(\tau)=\alpha(\cos\tau)\operatorname{sgn}(\tau-\pi)$,

$$\varphi^*_{\sigma, n}(z)=z^n\overline{\varphi_{\sigma, n}(1/\bar z)}=\overline{\varphi_{\sigma, n}(0)}\, z^n+\cdots+\varkappa_{\sigma, n}. \tag{2}$$

Через t_σ обозначим класс систем $\{t_{\sigma, n}\}_{n+0}^{\infty}$ тригонометрических полиномов с коэффициентами из $\boldsymbol{R}$, для которых при всех $n\in\boldsymbol{N}$ $t_{\sigma, 2n-1}$ и $t_{\sigma, 2n}$ — полиномы порядка n, $t_{\sigma, 0}=\mathrm{const}$ и $(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}t_{\sigma, m}(\tau)t_{\sigma, n}(\tau)d\sigma(\tau)=\delta_{m, n}$ $(m,\ n\in\boldsymbol{Z}_+)$. Классу t_σ принадлежит, в частности, система $\{T_{\sigma, n}(\tau)\}_{n=0}^{\infty}$ тригонометрических полиномов, полученная из системы 1, $\cos\tau$, $\sin\tau$, $\cos 2\tau$, $\sin 2\tau, \ldots$ по методу ортогонализации Шмидта относительно $d\sigma(\tau)$ на $[0, 2\pi]$. Класс t_σ содержит бесконечное множество существенно различных систем. Как заметил Сегё [3], строки полиномов n-го порядка любых двух систем $\{t_{\sigma, n}\}$ и $\{u_{\sigma, n}\} \in t_\sigma$ связаны формулой

$$\{t_{\sigma, 2n-1}, \; t_{\sigma, 2n}\} = \{u_{\sigma, 2n-1}, \; u_{\sigma, 2n}\} O_n \quad (n \in \boldsymbol{N}),$$

где O_n — некоторая ортогональная (2×2)-матрица. Сегё [3] показал, что одной из систем класса t_σ является система A_0, $A_1(\tau)$, $B_1(\tau)$, $A_2(\tau)$, $B_2(\tau), \ldots$, где

$$A_n(\tau) = \sqrt{2}\{1 + |\varphi_{\sigma, 2n}(0)|/\varkappa_{\sigma, 2n}\}^{-1/2} \operatorname{Re}\{e^{-i(n+\gamma_{2n})}\varphi_{\sigma, 2n}(e^{i\tau})\} \quad (n \in \boldsymbol{Z}_+), \tag{3}$$

$$B_n(\tau) = \sqrt{2}\{1 - |\varphi_{\sigma, 2n}(0)|/\varkappa_{\sigma, 2n}\}^{-1/2} \operatorname{Im}\{e^{-i(n+\gamma_{2n})}\varphi_{\sigma, 2n}(e^{i\tau})\} \quad (n \in \boldsymbol{N}), \tag{4}$$

параметр $\gamma_{2n} \in \boldsymbol{R}$ и определяется из условия $e^{-i\gamma_{2n}}\varphi_{\sigma, 2n}(0) \in \boldsymbol{R}$ (с точностью до слагаемого, кратного $\pi/2$). Эта система, вообще говоря, не совпадает с $\{T_{\sigma, n}(\tau)\}_{n=0}^{\infty}$. Так как входящий в (3)—(4) параметр γ_{2n} может вести себя довольно причудливым образом, то для приложений могут оказаться более удобными найденные автором в [4] формулы

$$[\varkappa_{\sigma, 2n} - \operatorname{Re}\varphi_{\sigma, 2n}(0)]^{1/2}(2\varkappa_{\sigma, 2n})^{-1/2}\, T_{\sigma, 2n-1}(\tau) = \operatorname{Re}\{e^{-i(n-1)\tau}\varphi_{\sigma, 2n-1}(e^{i\tau})\}, \tag{5}$$

$$[\varkappa_{\sigma, 2n} - \operatorname{Re}\varphi_{\sigma, 2n}(0)]^{1/2}(2\varkappa_{\sigma, 2n})^{-1/2}\, T_{\sigma, 2n}(\tau) = \operatorname{Im}\{e^{-in\tau}\varphi_{\sigma, 2n}(e^{i\tau})\}. \tag{6}$$

Соотношения (1)—(2) и (5)—(6) позволяют легко получать асимптотические представления полиномов $p_{\alpha, n}(\cos\tau)$ и $T_{\sigma, n}(\tau)$ из соответствующих представлений $\varphi_{\sigma, n}(e^{i\tau})$ или $\varphi^*_{\sigma, n}(e^{i\tau})$.

В дальнейшем мы часто будем иметь дело с абсолютно непрерывными функциями $\alpha(t)$ и $\sigma(\tau)$. Для таких α и σ вместо $p_{\alpha, n}(t)$, $\varphi_{\sigma, n}(z)$ и $T_{\sigma, n}(\tau)$ будут употребляться обозначения $p_n(t)$, $\varphi_n(z)$ и $\Phi_n(\tau)$ соответственно. Система $\{p_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ ортонормальна на $[-1, 1]$ с весом $p(t) = \alpha'(t)$ а системы $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\Phi_n(\tau)\}_{n=0}^{\infty}$ — с весом $\varphi(\tau) = \sigma'(\tau)$, соответственно на окружности $|z| = 1$ и на отрезке $[-1, 1]$.

2. Равномерные внутри $(a, b) \subset (0, 2\pi)$ асимптотические представления полиномов $\varphi_{\sigma, n}(e^{i\tau})$, $p_{\alpha, n}(\cos\tau)$ и $T_{\sigma, n}(\tau)$. В силу (2) исследование асимптотических свойств $\varphi_{\sigma, n}$ сводится к решению соответствующей задачи для $\varphi^*_{\sigma, n}$. Если

$$\ln \sigma'(\tau) \in L^1[0, 2\pi], \tag{7}$$

то по известной теореме Сегё [1, 2]

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^*_{\sigma, n}(z) = \pi(\sigma'; z) \tag{8}$$

равномерно внутри круга $|z| < 1$. Здесь

$$\pi(g; z) = \exp\{-(4\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\tau}+z}{e^{i\tau}-z} \ln g(\tau)\, d\tau\} \quad (|z| < 1)$$

— функция Сегё [2, с. 25]. Функция $\pi(\sigma'; z)$ аналитична и не равна нулю в круге $|z| < 1$. Почти при всех $\theta \in [0, 2\pi]$ $\pi(\sigma'; z)$ имеет радиальные граничные значения $\pi(\sigma'; e^{i\theta})$. Условие (7), вообще говоря, не обеспечивает справедливость соотношения (8) в отдельной точке $z=e^{i\theta}$. Работы ряда авторов (библиография приведена в [5—7]) посвящены нахождению дополнительных ограничений на σ, которые вместе с (7) достаточны для справедливости соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^*_{\sigma, n}(e^{i\theta}) = \pi(\sigma'; e^{i\theta}) \tag{9}$$

в отдельной точке θ или на множестве таких точек. Наиболее завершенными по форме являются результаты о равномерном по θ на всем отрезке $[0, 2\pi]$ или на его части предельном соотношении (9). Так, У. Гренандер и Г. Сегё [8] фактически доказали, что (9) имеет место равномерно по $\theta \in [0, 2\pi]$, если производная $\sigma' \in C_{2\pi}$ и строго положительна, а её модуль непрерывности удовлетворяет условию $\omega(\sigma'; \delta)\delta^{-1} \in L^1[0, \pi]$. В [9] показано, что последнее условие нельзя заменить более слабым ограничением $\omega(\sigma'; \delta)\ln\delta = o(1)$ $(\delta \to +0)$.

Следующая теорема, доказанная автором в [6], является локальным аналогом теоремы У. Гренандера и Г. Сегё.

Теорема 1. *Пусть функция σ не убывает и ограничена на $[0, 2\pi]$, ее производная σ' удовлетворяет на $[0, 2\pi]$ условию* (7), *а на некотором отрезке $[a, b] \subset [0, 2\pi]$ — условиям*

$$\sigma' \in C[a, b], \ \sigma'(\tau) > 0, \ \omega(\sigma'; \tau)_{[a, b]}\tau^{-1} \in L^1[0, b-a],$$

где $\omega(f; \delta)_{[a, b]} = \sup\{|f(\tau_1) - f(\tau_2)| : \tau_1, \tau_2 \in [a, b], |\tau_1 - \tau_2| \leq \delta\}$. Тогда равномерно внутри (a, b) выполняется предельное соотношение (9).

Теорема 1 окончательна в следующем смысле. Для любого модуля непрерывности $\omega(\delta)$, для которого $\omega(\delta)\delta^{-1} \notin L^1[0, \pi]$, найдётся вес φ такой, что $\ln\varphi \in L^1[0, 2\pi]$, $\varphi \in C[a, b]$, $\varphi(\tau) > 0$ $(a \leq \tau \leq b)$, $\omega(\varphi; \delta)_{[a, b]} = O(\omega(\delta))$, и тем не менее соотношение (9) не может выполняться равномерно внутри (a, b). Теорема 1 усиливает ряд известных результатов (библиографию см. [6]).

В силу соотношений (5)—(6) из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Пусть функция σ удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда равномерно по θ внутри (a, b)*

$$T_{\sigma, 2n-1}(\theta) = \sqrt{2}[\sigma'(\theta)]^{-1/2}\cos[n\theta - \gamma(\sigma'; \theta)] + o(1) \quad (n \to \infty),$$

$$T_{\sigma, 2n}(\theta) = \sqrt{2}[\sigma'(\theta)]^{-1/2}\sin[n\theta - \gamma(\sigma'; \theta)] + o(1) \quad (n \to \infty),$$

где

$$\gamma(\sigma'; \theta) = \widetilde{\ln\sigma'}(\theta)/2, \ \tilde{f}(\theta) = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} f(\tau)\operatorname{ctg}\frac{\theta-\tau}{2}\,d\tau,$$

и интеграл понимается в смысле главного значения Коши.

Из теоремы 1 в силу (1) известным способом получается также соответствующее асимптотическое представление для полинома $p_{\alpha, n}(\cos\theta)$ (см. [6]).

3. Асимптотические представления ортогональных полиномов в окрестности особой точки степенного типа. В теореме 1 производная σ' на отрезке $[a, b]$ заключена между двумя положительными константами. В этом пункте рассматривается случай, когда вес φ в отдельных точках отрезка $[0, 2\pi]$ стремится к нулю или бесконечности со степенной скоростью. Такие точки называются особыми точками степенного типа для веса φ. Мы укажем асимптотические представления полиномов $\varphi_n(e^{i\theta})$ через многочлены Якоби. Пусть $\{\widehat{p}_n^{\alpha,\beta}(t)\}_{n=0}^{\infty}$ — ортонормированная на $[-1, 1]$ с весом $(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}(\alpha, \beta>-1)$ система многочленов Якоби, а $\{\psi_n^{\alpha,\beta}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ — система многочленов, ортонормированная на окружности $|z|=1$ с весом

$$\psi^{\alpha,\beta}(\tau)=(1-\cos\tau)^{\alpha+1/2}(1+\cos\tau)^{\beta+1/2}\quad(\tau\in\boldsymbol{R};\ \alpha,\ \beta>-1).$$

Тогда, используя (1), можно показать, что при всех $n\in\boldsymbol{N}$ и $\tau\in\boldsymbol{R}$

$$\psi_{2n-1}^{\alpha,\beta}(e^{i\tau})=e^{i(n-1)\tau}[b_n^{\alpha,\beta}\widehat{p}_n^{\alpha,\beta}(\cos\tau)+id_n^{\alpha,\beta}\ \widehat{p}_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(\cos\tau)\sin\tau],\tag{10}$$

$$\psi_{2n}^{\alpha,\beta}(e^{i\tau})=e^{in\tau}[d_n^{\alpha,\beta}\widehat{p}_n^{\alpha,\beta}(\cos\tau)+ib_n^{\alpha,\beta}\widehat{p}_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(\cos\tau)\sin\tau],\tag{11}$$

где

$$b_n^{\alpha,\beta}=[\pi n/2n+\alpha+\beta+1)]^{1/2},\ d_n^{\alpha,\beta}=[\pi(n+\alpha+\beta+1)/(2n+\alpha+\beta+1)]^{1/2}.$$

Следующая теорема дает асимптотическое представление через многочлены Якоби многочленов $\varphi_n(z)$, ортогональных с весом

$$\varphi(\tau)=\psi^{\alpha,\beta}(\tau)h(\tau)\quad(\tau\in\boldsymbol{R};\ \alpha,\ \beta>-1).\tag{12}$$

Теорема 2. *Пусть вес φ имеет вид* (12), *где*

$$h\in C_{2\pi},\ h(\tau)>0\ (\tau\in\boldsymbol{R}),\ \omega(h;\tau)\tau^{-1}\in L^1[0,\ \pi],\tag{13}$$

и пусть

$$\lambda_n\in\boldsymbol{R},\ n^{-1}\leqq\lambda_n\leqq 1\quad(n\in\boldsymbol{N}),\ \lambda_n\downarrow 0\quad(n\to\infty).\tag{14}$$

Тогда при $n\to\infty$ равномерно по $\theta\in\boldsymbol{R}$

$$\varphi_n(e^{i\theta})=\psi_n^{\alpha,\beta}(e^{i\theta})\overline{\pi(h;\ e^{i\theta})}\,[1+O(\mu_{h,n}^{\alpha,\beta})],$$

где

$$\mu_{h,n}^{\alpha,\beta}=\omega(h;\frac{1}{n})\ln n+\int_0^{\lambda_n}\frac{\omega(h;\ \tau)}{\tau}\,d\tau+[\delta_n(\varphi)+\delta_n(\psi^{\alpha,\beta})][\int_{\lambda_n}^{\pi}\frac{\omega^2(h;\ \tau)}{\tau^2}\,d\tau]^{1/2},$$

$$\delta_n(\varphi)=\inf_{c_0,\ldots,c_n\in\boldsymbol{C}}\{(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}|\pi(\varphi;\ e^{i\tau})-c_ne^{in\tau}-\cdots-c_0|^2\varphi(\tau)d\tau\}^{1/2},\tag{15}$$

и аналогично определяется $\delta_n(\psi^{\alpha,\beta})$.

Легко показать, что последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющую условиям (14), можно выбрать так, чтобы $\mu_{h,n}^{\alpha,\beta}\to 0\ (n\to\infty)$.

Для $l\in\{1,\ldots m\}$ и $\varepsilon\in(0,1)$ через $Q_{l,\varepsilon}$ обозначим множество комплексных чисел, получающееся при удалении из множества $|z|\geqq 1$ ε-окрестностей $|z-z_\nu|<\varepsilon$ точек $z_\nu=e^{i\theta_\nu}$, для всех $\nu\in\{1,\ldots,m\}$, неравных l. Имеет место следующая

Теорема 3. *Пусть вес φ имеет вид*

$$\varphi(\tau)=h(\tau)|\sin[(\tau-\theta_1)/2]^{\gamma_1}\cdot\ldots|\sin[(\tau-\theta_m)/2]|^{\gamma_m},\tag{16}$$

где h удовлетворяет условиям (13);

(17) $$-\pi<\theta_1<\cdots<\theta_m\leq\pi;\quad \gamma_1>-1,\ldots,\gamma_m>-1.$$

Пусть $l\in\{1,\ldots,m\}$ *и фиксированная последовательность* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям* (14). *Тогда для любого фиксированного* $\varepsilon\in(0,1)$ *при* $n\to\infty$ *равномерно по* $z\in Q_{l,\varepsilon}$:

$$\varphi_n(z)=2^{\gamma_l/4}e^{in\theta_l}\psi_n^{(\gamma_l-1)/2,\,-1/2}(e^{-i\theta_l}z)\,\overline{\pi}(\varphi(\tau)\,|\sin[(\tau-\theta_l)/2]|^{-\gamma_l};\,z^{-1})[1+O(\mu_n)],$$

где $\overline{\pi}(g;z)$ — *аналитическая в круге* $|z|<1$ *функция, коэффициенты разложения Маклорена которой сопряжены соответствующим коэффициентам* $\pi(g;z)$,

$$\mu_n=\omega(h;n^{-1})\ln n+\int_0^{\lambda_n}\tau^{-1}\omega(h;\tau)\,d\tau+[n^{-1/2}+\omega(h;n^{-1})]\,[\int_{\lambda_n}^{\pi}\tau^{-2}\omega^2(h;\tau+1)d\tau+1]^{1/2}.$$

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы 3 и фиксированный отрезок* $[a,b]$ *содержит точку* θ_l *и весь* φ *не обращается в нуль или бесконечность при всех* $\theta\in[a,b]\diagdown\{\theta_l\}$. *Тогда при* $n\to\infty$ *и фиксированном* $c>0$ *равномерно по* $\theta\in[a,b]\diagdown(\theta_l-cn^{-1},\,\theta_l+cn^{-1})$

$$\varphi_n^*(e^{i\theta})=\pi(\varphi;\,e^{i\theta})\,\{1+O(\mu_n+n^{-1}|\theta-\theta_l|^{-1})\}.$$

Это утверждение, вообще говоря, теряет силу, если в его формулировке опустить ограничение $\omega(h;\,\delta)\delta^{-1}\in L^1[0,\pi]$. При доказательстве следствия 2 использованы известные асимптотические представления многочленов Якоби [1, с. 205].

С помощью соотношений (1) и (5)—(6) из теорем 2 и 3 и следствия 2 можно получить соответствующие асимптотические представления полиномов $p_n(t)$ и $\Phi_n(\tau)$. В частности, из теоремы 2 в виде простых следствий можно получить результаты Бернштейна [10] об асимптотических представлениях многочленов $p_n(t)$, ортогональных на $[-1,1]$ с весом $p(t)=(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}$ $(\alpha,\beta>-1)$ при значительно более слабом ограничении на гладкость непрерывного положительного множителя $H(t)$ (в нашем случае требуется, чтобы $\omega(H;\,\delta]_{[-1,1]}\delta^{-1}\in L^1[0,1]$, а в [10] — чтобы $\omega(H';\,\delta)_{[-1,1]}=O(\ln^{-2}\delta)(\delta\to+0)$).

4. Усиление теоремы Геронимуса. Оценки величины $\delta_n(\varphi)$. Геронимус [2, теорема 3.6] доказал, что если выполняется условие (7) и $r_n=1-1/(2n)$, то найдутся константы C_1 и C_2 такие, что в замкнутом круге $|z|\leq1$ при всех $n\in N$

(18) $$|\varphi_{\sigma,n}^*(z)|\leq\max_{0\leq\tau\leq2\pi}|\pi(\sigma';\,r_ne^{i\tau})|\,\{C_1+C_2\sqrt{n}\,\delta_{\sigma,n}\},$$

где $\delta_{\sigma,n}=[\pi(\sigma';\,0)]^{-1}\,[|\varphi_{\sigma,n+1}(0)|^2+|\varphi_{\sigma,n+2}(0)|^2+\cdots]^{1/2}$. Нами получено следующее усиление этого результата.

Теорема 4. *Пусть* $r_n=1-1/(2n)$ *и выполнено условие* (7). *Тогда найдутся константы* C_1 *и* C_2 *такие, что в замкнутом круге* $|z|\leq1$

(19) $$|\varphi_{\sigma,n}^*(z)|\leq|\pi(\sigma';\,r_nz)|\,\{C_1+C_2\sqrt{n}\,\delta_{\sigma,n}\}\quad(n\in N).$$

Заметим, что в силу (2) левую часть (19) можно заменить на $|\varphi_{\sigma,n}(z)|$. В связи с оценками (18)—(19) представляет интерес задача о порядке величины $\delta_{\sigma, n}$. В частности, желательно выяснить, для каких σ имеет место оценка $\delta_{\sigma, n}=O(n^{-1/2})$. Для абсолютно непрерывной σ $\delta_{\sigma, n}$ совпадает с величиной $\delta_n(\varphi)$ (см. (15)). В [11] доказано, что если вес φ удовлетворяет условиям (16), (17),

$$h \in C_{2\pi},\ h(\tau)>0,\ \omega(h;\ \delta)=O(\sqrt{\delta}) \quad (\delta \to +0) \tag{20}$$

и $|\gamma_1|+\cdots|\gamma_m|>0$, то $\delta_n(\varphi) \asymp n^{-1/2}$. В [2] доказано, что если $\varphi(\tau)=h(\tau)$, где

$$0<\operatorname{ess\,inf} h(\tau) \leq \operatorname{ess\,sup} h(\tau)<\infty,\ h \in \operatorname{Lip}(1/2,\ 2) \tag{21}$$

(т. е. квадратичный модуль непрерывности $\omega^{(2)}(h;\ \delta)=O(\sqrt{\delta})$), то $\delta_n(\varphi)=O(n^{-1/2})$. Из теоремы 4 и последней оценки вытекает

Следствие 3. *Пусть вес* φ *удовлетворяет условиям* (16), (17) *и* (21). *Тогда найдется константа* $C_3(\varphi)$ *такая, что для всех* $n \in \boldsymbol{N}$ *и* $\theta \in \boldsymbol{R}$

$$|\varphi_{n-1}(\boldsymbol{e}^{i\theta})| \leq C_3(\varphi)(|\sin[(\theta-\theta_1)/2]|+n^{-1})^{-\gamma_1/2} \ldots$$
$$(|\sin[(\theta-\theta_m)/2)|+n^{-1})^{-\gamma_m/2}. \tag{22}$$

В [4] доказано, что если вес φ удовлетворяет условиям (16), (17) и (13), то оценка (22) является двусторонней. При $\gamma_1=\cdots=\gamma_m=0$ следствие 3 известно [2, с. 48].

Следующая теорема обобщает цитированный выше результат И. А. Ибрагимова и В. Н. Солева.

Теорема 5. *Пусть вес* φ *имеет вид*

$$\varphi(\tau)=h(\tau) \prod_{\nu=1}^{m} \prod_{s=0}^{m_\nu} |f_s(e^{i(\tau-\theta_\nu)})|^{\alpha_{\nu, s}},$$

где h *удовлетворяет условиям* (20), $m,\ m_\nu \in \boldsymbol{N}$,

$$f_0(z)=2/(1-z),\ f_\nu(z)=1+\ln f_{\nu-1}(z) \quad (\nu \in \boldsymbol{N}),$$

показатели $\alpha_{\nu, s}$ *таковы, что* $\varphi \in L^1[0,\ 2\pi]$ и $|\alpha_{1, 0}|+\cdots+|\alpha_{m, 0}|>0$. *Тогда* $\delta_n(\varphi) \asymp n^{-1/2}$.

Этот результат теряет силу, если $|\alpha_{1, 0}|+\cdots+|\alpha_{m, 0}|=0$. Так, например, если $\varphi(\tau)=|f_k(e^{i\tau})|^{\beta_k} \ldots |f_l(e^{i\tau})|^{\beta_l}$; $k,\ l \in \boldsymbol{N}$, $k \leq l$; $\beta_k, \ldots, \beta_l \in \boldsymbol{R}$, $\beta_k \neq 0$, то

$$\delta_n(\varphi)=O(1/\sqrt{n L_1(n) \ldots L_k(n)}) \quad (n \to \infty),$$

где

$$L_1(z)=\ln z,\ L_\nu(z)=\ln L_{\nu-1}(z) \quad (\nu=2,\ 3, \ldots).$$

При замене в условиях теоремы 5 ограничения (20) ограничением (21) оценка сверху $\delta_n(\varphi)=O(1/\sqrt{n})$ сохраняет силу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Сегё. Ортогональные многочлены. Москва, 1962.
2. Я. Л. Геронимус. Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке. Москва, 1958.
3. G. Szegö. On bi-ortogonal systems of trigonometric polynomials. *Mat. kut. intez közl.*, **8**, 1964, No 3, 255—273.
4. В. М. Бадков. Приближение функций в равномерной метрике суммами Фурье по ортогональным полиномам. *Труды Матем. ин-та АН СССР,* 145, 1980, 20—62.
5. П. К. Суетин. Проблема В. А. Стеклова в теории ортогональных многочленов. *Итоги науки и техники,* Матем. анализ, **15**, 1977, 5—82.
6. В. М. Бадков. Асимптотическое поведение ортогональных многочленов. *Матем. сборник,* **109**, 1979, 46—59.
7. Б. Л. Голинский. Асимптотическое представление ортогональных многочленов. *Успехи матем. наук,* **35**, 1980, 145—196.
8. У. Гренандер, Г. Сегё. Теплицевы формы и их приложения. Москва, 1961.
9. Б. Л. Голинский. О двух основных условиях для асимптотического представления многочленов, ортонормальных на единичной окружности. *Матем. заметки,* **15**, 1974, № 6, 847—855.
10. С. Н. Бернштейн. О многочленах, ортогональных на конечном отрезке. Собрание сочинений, т. 2. Москва, 1954, 7—106.
11. И. А. Ибрагимов, В. Н. Солев. Асимптотическое поведение ошибки прогноза стационарной последовательности со спектральной плотностью специального вида. *Теория вероятностей и ее применения,* **13**, 1968, № 4, 746—750.

ИММ УНЦ АН СССР
620219 Свердловск СССР

Получено 4 июня 1981 г.