КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'81
София, 1983, с. 28—33

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
Sofia, 1983, p. 28—33

КВАЗИКОНФОРМНОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ И ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

В. И. Белый

Резюме. Рассматриваются вопросы, связанные с использованием обобщенных решений уравнения Бельтрами $f_{\bar{z}}=\mu f_z$ в задачах приближения функций класса $A(K)$, то есть аналитических во внутренних точках замкнутого множества K и непрерывных на K. Для некоторых типов континуумов со связным дополнением устанавливается связь между наличием квазиконформного продолжения функции $f\in A(K)$ с заданными свойствами отклонения $\mu(z)$, $|\mu(z)|\leq k<1$ и скоростью стремления к нулю наилучших приближений этой функции.

Получающиеся при этом оценки скорости приближения являются, вообще говоря, существенно меньшими скорости убывания геометрической прогрессии (соответствующей функциям с аналитическим продолжением в некоторое расширение K) и существенно выше любой степенной (соответствующей функциям различных Гельдеровых классов в K и функциям с заданной мажорантой m-го модуля гладкости).

Основное внимание уделено принципиальной возможности использования уравнения Бельтрами в задачах аппроксимации, а не достижению максимальной общности результатов и неулучшаемости оценок. С этой точки зрения результаты работы носят предварительный характер.

1. Пусть $A(K)$ — класс функций, аналитических во внутренних точках компакта $K\subset\mathbf{C}$ и непрерывных на K ($\mathbf{C}$ — конечная плоскость). Вопрос об описании связи между возможностью аналитического продолжения функции $f\in A(K)$ в более широкое множество и скоростью полиномиальной (или дробно-рациональной) аппроксимации такой функции достаточно хорошо изучен. Этим мы обязаны работам Фабера, С. Н. Бернштейна, Г. Сегё, Д. Уолша и др. (см. [1]). В частности, если K — регулярный компакт со связным дополнением Ω; L_R — линия уровня функции Грина для Ω с полюсом в ∞, $R>1$; $f\in A(K)$ допускает аналитическое продолжение в $\bar{G}_R=\overline{\operatorname{Int} L_R}$, то существует последовательность полиномов $\{P_n(z)\}$ степеней $n=0, 1, 2, \ldots$, таких, что

$$|f(z)-P_n(z)|\leq M/R^n,\quad z\in K, \tag{1.1}$$

где M не зависит от n и z (см. [2]). В свою очередь, выполнение (1.1) влечет наличие аналитического продолжения с K в G_R. Если пренебречь некоторым расхождением прямой и обратной частей цитируемого результата (более глубокое изучение этого вопроса приводит к понятию максимальной сходимости [1]), приходим к выводу, что $A(\bar{G}_R)$ — подкласс класса $A(K)$, конструктивная характеристика которого в терминах наилучших приближений имеет вид: $E_n(f) \leq Mq^n$, $0<q<1$, то есть наилучшие приближения стремятся к нулю со скоростью геометрической прогрессии. Между функциями с такой скоростью полиномиальной аппроксимации и функциями из $A(K)$, скорость приближения которых не превышает $n^{-\gamma}$, $\gamma>0$, количественная теория приближения которых интенсивно развивалась в последние десятилетия, имеются классы таких функций, которые, вообще говоря, не имеют аналитического продолжения в окрестность K, обладают скоростью приближения полиномами по порядку, существенно превышающей любую степенную. Например, функции, для которых $E_n(f) \leq Mq^{\sqrt{n}}$ на K.

В данном сообщении предлагается рассматривать функции с такой „промежуточной" скоростью аппроксимации на основе существования квазиконформного их продолжения в окрестность компакта K с заданными свойствами комплексной дилатации.

2. Рассмотрим уравнение Бельтрами для функций комплексного переменного в некоторой области G, содержащей компакт K. Как известно, такое уравнение имеет вид

$$w_{\bar{z}} = \mu(z) w_z, \tag{2.1}$$

где $\mu(z)$ — измеримая функция в области G, удовлетворяющая условию

$$|\mu(z)| \leq k < 1. \tag{2.2}$$

Обобщенным решением уравнения (2.1) называют непрерывную функцию имеющую обобщенные производные, удовлетворяющие (2.1) почти всюду в G.

Уравнение (2.1) достаточно хорошо изучено [3, 4, 5]. Если $w_1(z)$ — некоторое гомеоморфное решение уравнения (2.1), то оно является k-квазиконформным отображением; всякое другое решение $w_2(z)$ представляется в виде суперпозиции $f \circ w_1$, где f — аналитическая функция. В частности, если G — односвязная ограниченная область, то существует гомеоморфное решение $w: G \to \{w: |w|<1\}$ и оно единственно с точностью до конформных отображений круга на себя [4].

Отметим, что если измеримая функция $\mu(z)$ обращается в нуль на $K \subset G$, то всякое решение уравнения (2.1) принадлежит классу $A(K)$ и представляет собой функцию, допускающую k-квазиконформное (вообще говоря, неоднолистное) продолжение в G.

Введем основные определения и обозначения: K_ε — открытая ε-окрестность компакта K(ε-расширение); $B_\mu(K, \varepsilon)$ — совокупность решений уравнения (2.1) на K_ε с функцией $\mu(z)=0$ при $z \in K$;

$$B(K) = \bigcup_{\substack{\varepsilon>0 \\ |\mu| \leq k<1}} B_\mu(K, \varepsilon);$$

$\varkappa(t)$, $t \in [0, \infty)$ — непрерывная функция со свойствами: 1) $\varkappa(+0)=0$; 2) $\varkappa(t)\uparrow$ и непрерывна на $[0, \infty)$; 3) $\varkappa(t) \leq k < 1$;

$B^\varkappa(K, G)$ — множество решений уравнения (2.1) на открытом множестве $G \supset K$ для всевозможных измеримых $\mu(z)$, удовлетворяющих условиям: 1) $|\mu(z)| \leq k < 1$; 2) $\mu(z)=0$ при $z \in K$; 3) $|\mu(z)| \leq \varkappa[\rho(z, K)]$ при $z \in G \setminus K$, где $\rho(z, K) = \inf_{\zeta \in K} |z-\zeta|$; $B^\varkappa(K) = \bigcup_{G \supset K} B^\varkappa(K, G)$; $\Phi(z)$ — функция Римана, отображающая Ω на $\Omega' = \{w: |w|>1\}$.

Как следует из определения, $B(K)\subset A(K)$ и $B^{\varkappa}(K)\subset A(K)$, кроме того, любой из этих классов содержит функции, аналитические на K.

Если f — обобщенное решение уравнения (2.1) в G, то f_z и $f_{\bar z}$ принадлежат классу $L_p(\bar G')$, $p=p(k)>2$; $\bar G'\subset G$ (см. [5, 4]).

3. Установим аналог теоремы Уолша для класса $B^{\varkappa}(E)$, где E — континуум со связным дополнением $\Omega(E)$, $\infty\in\Omega(E)$. Пусть L_R — линия уровня для E, G_R — ее внутренность, $|L_R|$ — длина L_R. Определим при $x\in[1, R]$ функцию

$$h_n(x)\stackrel{\text{def}}{=}(n(x-1)+x)x^{-n}(x-1)^{-2}.$$

Очевидно, что для всякого фиксированного $t_0>1$ при $n\to\infty$ $h_n(t_0)\to 0$ со скоростью функции a^n, $a\in(0, 1)$, а при фиксированном n и $t\to 1$ $h_n(t)\to\infty$ со скоростью функции $1/(t-1)^2$.

Теорема 1. *Если $f(z)\in A(E)$ на континууме E и допускает квазиконформное продолжение в область, содержащую $\bar G_R$, $R>1$, являясь функцией класса $B^{\varkappa}(E, G_R)$, то существует последовательность полиномов $P_n(z)$, $n=0, 1, \ldots$, степени не выше n, для которых при всех $z\in E$*

$$|f(z)-P_n(z)|\leq M\gamma_n(\varkappa, R), \tag{3.1}$$

где $M=(e/\pi)\max\{\|f\|_{C(\bar G_R)}, \|f_z\|_{L_2(\bar G_R)}\}$, *а функция*

$$\gamma_n(\varkappa, R)=\inf_{1<u\leqq R}\{|L_u|h_n(u)+\|\varkappa[\rho(\zeta, L)]h_n(|\Phi(\zeta)|)\|_{L_2(G_u\setminus E)}\} \tag{3.2}$$

стремится к нулю со скоростью, зависящей от функции $\varkappa$.

Доказательство. Пусть $1<R_1<R$. Сохраняя за функцией f в $\bar G_R\setminus E$ прежнее обозначение и учитывая ее квазиконформность, имеем

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{R_1}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint_{G_{R_1}}\frac{f_{\bar\zeta}}{\zeta-z}\,d\sigma_\zeta. \tag{3.3}$$

Приближающие полиномы $P_n(z)$ построим с помощью рядов по обобщенным полиномам Фабера, соответствующих интегралам (3.3), с использованием метода суммирования Дзядыка [6]. Для доказательства теоремы Уолша этот метод применялся в [7].

Пусть $w=\Phi(z)$ — функция Римана, конформно и однолистно отображающая $\Omega(E)$ на внешность единичного круга Ω', причем $\Phi(\infty)=\infty$; $\Phi'(\infty)>0$. Полагая $\zeta_t=\Phi^{-1}[\Phi(\zeta)e^{-it}]$ при $t\in[-\pi, \pi]$, $\bar\zeta\in E$, и $D_n(t)=1/2+\sum_{k=1}^{\infty}\cos kt$, построим функцию

$$P_n(z, \varepsilon)=\frac{1}{2\pi^2 i}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(t)\Big[\int_{L_{R_1}}\frac{f(\zeta)}{\zeta_{-t}-z}\,d\zeta-2i\iint_{G_{R_1}\setminus G_{1+\varepsilon}}\frac{f_{\bar\zeta}}{\zeta_{-t}-z}\,d\sigma_\zeta\Big]dt, \tag{3.4}$$

где $0<\varepsilon<R_1-1$. В каждой точке $\zeta\in G_R\setminus E$ справедливо разложение по обобщенным полиномам Фабера $\Pi_k(z)$, $k=1, 2, \ldots$ [8] $(\zeta_{-t}-z)^{-1}=\sum_{k=1}^{\infty}[\Phi(\zeta)]^{-k}e^{-ikt}\Pi_k(z)$, $z\in E$, откуда следует, что $P_n(z, \varepsilon)$ — полином n-й степени. В силу тождества

$$\frac{1}{2\pi^2 i}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt\int_{L_{R_1}}\frac{d\zeta}{\zeta_{-t}-z}=\Pi_1(z)/\Phi'(\infty)=1$$

получим

$$f(z)-P_n(z,\varepsilon)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\varphi_{R_1}(t,z,\varepsilon)dt, \tag{3.5}$$

где

$$\varphi_{R_1}(t,z,\varepsilon)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{R_1}}\frac{f(z)-f(\zeta)}{\zeta_{-t}-z}d\zeta+\frac{1}{\pi}\iint_{G_{R_1}\setminus \overline{G}_{1+\varepsilon}}\frac{f_{\overline{\zeta}}}{\zeta_{-t}-z}d\sigma_\zeta .$$

Для нас существенно, что φ_{R_1} является аналитической функцией по $t\in[-\pi,\pi]$ и (3.5) — ее частная сумма Фурье в точке $t=0$, следовательно с учетом (3.3) имеем

$$f(z)-P_n(z,\varepsilon)=\varphi_{R_1}(0,z,\varepsilon)-\sum_{k=n+1}^{\infty}\alpha_k=-\frac{1}{\pi}\iint_{G_{1+\varepsilon}}\frac{f_{\overline{\zeta}}}{\zeta-z}d\sigma_\zeta-\sum_{k=n+1}^{\infty}\alpha_k=I_\varepsilon-\sum_{k=n+1}^{\infty}\alpha_k,$$

где $\alpha_k=\alpha_k(\varepsilon)$ — коэффициенты Фурье для φ_{R_1} и

$$|\alpha_k|=\Big|\frac{\Pi_k(z)}{2\pi i}\Big\{\int_{L_{R_1}}\frac{f(z)-f(\zeta)}{[\Phi(\zeta)]^k}d\zeta-2i\iint_{G_{R_1}\setminus\overline{G}_{1+\varepsilon}}\frac{f_{\overline{\zeta}}}{[\Phi(\zeta)]^k}d\sigma_\zeta\Big\}\Big|$$

$$\leq 2\|f\|_{C(\overline{G}_R)}|\Pi_k(z)|\cdot|L_{R_1}|/2\pi R_1^k+\frac{|\Pi_k(z)|}{\pi}\iint_{G_{R_1}}\frac{|\mu(\zeta)||f_\zeta|}{|\Phi(\zeta)|^k}d\sigma_\zeta.$$

Из неравенства $|\Pi_k(z)|\leq ek$ (см. [8]) после несложных преобразований с применением неравенства Гёльдера и предельного перехода при $\varepsilon\to 0$ окончательно находим, полагая $P_n(z)=P_n(z,0)$,

$$|f(z)-P_n(z)|\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}|\alpha_k|\leq(e/\pi)\|f\|_{C(\overline{G}_R)}|L_{R_1}|h_n(R_1)$$

$$+(e/\pi)\Big\||\mu(\zeta)|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k}{|\Phi(\zeta)|^k}\Big\|_{L_2(G_R)}\|f_\zeta\|_{L_2(G_R)}$$

$$\leq M\inf_{1<u\leq R}\{h_n(u)|L_u|+\|\varkappa[\rho(\zeta,L)]h_n(|\Phi(\zeta)|)\|_{L_2(G_u\setminus E)}\},$$

что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е 1. Из определения функции $\gamma_n(\varkappa,R)$ понятно, что оценка (3.1) является содержательной только для таких мажорант $\varkappa(t)$, которые достаточно быстро стремятся к нулю при $t\to 0$. Например, для континуумов с достаточно гладкой границей необходимо выполнение условия $\varkappa(t)=0(t^2)$ при $t\to 0$, в противном случае $\gamma_n(\varkappa,R)=\infty$.

Отметим, что при $\varkappa(t)\equiv 0$ из теоремы 1 немедленно получаем теорему Уолша. В общем случае сложный вид функции $\gamma_n(\varkappa,R)$ объясняется тем, что мы практически не делаем каких-либо ограничений на функции класса $B^\varkappa(E)$. Если, например, рассматривать функции μ, принадлежащие классам Гёльдера, то это приводит к решениям класса C_1 [5], следовательно, в (3.1) можно положить

$$M=(e/\pi)\max\{\|f\|_{C(\bar{G}_R)},\ \|f_z\|_{C(\bar{G}_R)}\};$$

$$\gamma_n(\varkappa, R)=\inf_{1<u\leq R}\{|L_u|h_n(u)+\|\varkappa[\rho(\zeta, L)h_n(|\Phi(\zeta)|)\|_{C(\bar{G}_R)}\}.$$

Теорема 1 позволяет получить сравнительно простые оценки в тех случаях, когда более конкретно заданы свойства ∂E. (Такая зависимость от геометрических свойств множества является естественной и вытекает из самого характера определения классов $B^{\varkappa}(E)$.) Приведем один из таких результатов.

Теорема 2. *Пусть $\bar{G}$ — замкнутая область с гладкой границей L, такой, что $[\Phi^{-1}(w)]'$ — ограничена. Если $f\in B^{\varkappa}(\bar{G}_R)$ и ее комплексное отклонение $\mu(z)$ гельдерово и удовлетворяет условию $|\mu(z)|\leq\varkappa(u-1)$ при $z\in L_u$ для почти всех $z\in\bar{G}_R\setminus\bar{G}$, то существует последовательность полиномов $\{P_n(z)\}$, $n=0, 1, \ldots$ степени не выше n, для которой при всех $z\in\bar{G}$*

$$|f(z)-P_n(z)|\leq M\inf_{1<u\leq R}[h_n(u)+\int_1^u t\varkappa(t-1)h_n(t)dt],$$

где M — константа, зависящая только от $\bar{G}$ и f.

Доказательство. Действительно, в данном случае $|L_u|\leq M=\mathrm{const}$, $1\leq u\leq R$; $f_z\in C_1$ в $\bar{G}_R$. Осталось учесть неравенство

$$\iint_{G_u}|\mu(\zeta)|h_n(|\Phi(\zeta)|)\,d\sigma_\zeta=\iint_{1<|w|\leq u}\varkappa(|w|-1)h_n(|w|)|\frac{d}{dw}\Phi^{-1}(w)|^2 d\sigma_w$$

$$\leq M_2\int_1^u\varkappa(r-1)h_n(r)rdr,$$

где M_2 зависит только от области.

Замечание 2. Теорема 1 без труда переносится на случай произвольных регулярных компактов со связным дополнением, аналогичную теорему можно доказать для рациональных аппроксимаций функций, допускающих квазиконформное продолжение континуумов, дополнение которых состоит из конечного числа односвязных областей.

4. В связи с приведенными результатами возникает естественный вопрос о получении обратных теорем к теореме 1 или ее частным случаям, соответствующим конкретной скорости аппроксимации. Ответ на этот вопрос связан с построением квазиконформных продолжений класса $B^{\varkappa}(E)$ или с конструктивным построением функций класса $B^{\varkappa}(E)$, приближающих функции класса $A(E)$, и является пока открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Л. Уолш. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. Москва, 1961.
2. J. L. Walsh, H. G. Russell. On the convergence and overconvergence of sequences of polynomials of best simultaneous approximation to several functions analytic in distinct regions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **36**, 1934, 13—28.

3. Л. Альфрос. Лекции по квазиконформным отображениям. Москва, 1969. 134 с.
4. O. Lehto, K. I. Virtanen. Quasiconformal Mappings in the plane. Berlin, 1973.
5. L. Bers. Quasiconformal Mappings and Teichmuller's Theorem; Analytic Functions. Princeton, 1960, 89—120.
6. В. К. Дзядык. О применении обобщенных полиномов Фабера к приближению интегралов типа Коши и функций классов A^r в областях с гладкой и кусочно-гладкой границей. *Укр. мат. жс.*, 24, 1972, №1, 3—19.
7. А. С. Прыпик. О применении обобщенных многочленов Фабера к приближению функций, аналитических на замкнутых множествах. — В: Теория приближения и ее приложения. Киев, 1974, 114—118.
8. В. И. Смирнов, Н. А. Лебедев. Конструктивная теория функций комплексного переменного. Москва—Ленинград, 1964, 438 с.

Институт прикладной математики и механики АН УССР Донецк СССР

Получено 3 июня 1981 г.