КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'81
София, 1983, с. 34—37

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
Sofia, 1983, p. 34—37

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА МЕТРИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ

В. И. Бердышев

Резюме. В любом нормированном пространстве X ($\dim X \geqq 3$) существует выпуклое замкнутое множество M и точка, в которой метрическая проекция на M недифференцируема в некотором направлении. Для отображения $x \to P_M^t(x) = \{m \in M : \|x-m\| \leqq t+\rho(x,M)\}$, где $t=t(x)>0$, $M=M(x)$ — выпуклозначное отображенае, установлен аналог формулы Тейлора в случае, когда функционал $r(x)=t(x)+\rho(x, M(x))$ дифференцируем.

Пусть X — нормированное пространство, M — фиксированное множество из X, $x \in X$, $\rho(x, M) = \inf\{\|x-m\| : m \in M\}$, $t=t(x)$ — неотрицательный функционал на X,

$$P_M^t(x) = \{m \in M : \|x-m\| \leqq t+\rho(x, M)\}, \quad P_M(x) = P_M^0(x).$$

В настоящей заметке рассматривается вопрос о дифференцировании отображения

$$P_M^t : x \to P_M^t(x). \tag{1}$$

При $t=0$ это отображение называется метрической проекцией. Множество M в дальнейшем будем считать выпуклым.

Дифференциальные свойства метрической проекции на конечномерное подпространство из $L_p(S, \mu)$, где $2 \leqq p < \infty$, μ — неотрицательная мера, изучали Холмс и Крипке [1]. Кроо показал [2], что если M — чебышевское (такое, что P_M однозначна) конечномерное подпространство из $C(Q)$, где Q — отрезок, то для любых $x, y \in C(Q)$ существует односторонний предел

$$\lim_{\lambda \to +0} \lambda^{-1}(P_M(x+\lambda y) - P_M(x)). \tag{2}$$

Крускал указал выпуклое множество M в трехмерном евклидовом пространстве и пару точек x, y, для которых не существует одностороннего предела (2), и высказал предположение, что в двумерном случае такой предел для выпуклого множества M всегда существует [3].

Для произвольного пространства имеет место

Теорема 1. *Пусть X — нормированное пространство. Если $\dim X \geqq 3$, то найдутся выпуклое множество $M \subset X$, элементы $x \in X \setminus M$, $y \in X$, последовательность чисел $\{t_i\}_0^\infty$, $t_i>0$, $t_i \to 0$ $(i \to \infty)$, для* *которых множества $P_M(x)$, $P_M(x+t_iy)$ одноточечны и не существует предела*

$$\lim_{i\to\infty} t_i^{-1}(P_M(x+t_iy)-P_M(x)).$$

Если $\dim X=2$, *то эквивалентны следующие утверждения:*

1) *предел* (2) *существует для любого строго выпуклого замкнутого множества $M\subset X$ и любых $x, y\in X$;*

2) *единичный шар пространства X является многоугольником.*

В следующей теореме утверждается, что даже в хороших (равномерно выпуклых и гладких) пространствах может быть много точек, в которых метрическая проекция не дифференцируема односторонне. Случай гильбертова пространства рассмотрен в [4].

Ограниченное тело $M\subset X$ называется равномерно выпуклым, если

$$\inf\left\{\rho\left(\frac{x+y}{2},\ \partial M\right) : x,\ y\in M,\ \|x-y\|\geqq t\right\}>0\quad (t>0),$$

где ∂M — граница тела M.

Нормированное пространство X, единичный шар которого является равномерно выпуклым телом, називатся равномерно выпуклым [5].

Теорема 2. *Пусть X — сепарабельное равномерно вупуклое пространство с дифференцируемой по Фреше нормой, $\dim X>1$. Существует равномерно выпуклое ограниченное тело $M\subset X$ и плотное на его границе множество D, такие, что для любого $z\in D$ найдутся x, $y\in X$, для которых не существует одностороннего предела* (2) *и $z=P_M(x)$.*

Пусть теперь $t(x)>0$. В этом случае для отображения P^t_M имеет место некоторый аналог формулы Тейлора. Будем рассматривать общую задачу аппроксимации, когда множество $M=M(x)$ зависит от x, т. е. задано выпуклозначное отображение $M(x)$. Через $h(A, B)$ обозначается хаусдорфово расстояние между множествами A и B, через V — единичный шар пространства.

Теорема 3. *Пусть в окрестности точки x_0 нормированного пространства X заданы выпуклозначное отображение $M=M(x)$ и функционал $t=t(x)\geqq 0$, $t(x_0)>0$. Если функционал $r(x)=t(x)+\rho(x, M(x))$ является n-раз дифференцируемым, то для отображения*

$$A(x)=\left[r(x_0)+r^{(1)}(x_0)\,(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}\,r^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n\right]\cdot V+x$$

выполняется соотношение

$$h(P^t_M(x),\ M(x)\cap A(x))=o(\|x-x_0\|^n).$$

Отметим [6], что если M — выпуклое чебышевское множество из X и норма дифференцируема в точке $x_0-P_M(x_0)$, то функционал $\rho(x, M)$ также дифференцируем в точке x_0.

В заключение рассмотрим пространство $X=C(Q)$ вещественных непрерывных на компакте Q функций и в качестве M — класс

$$M=H_\omega=\{x\in C(Q) : |x(q_1)-x(q_2)|\leqq\omega(q_1,\ q_2)\quad \forall q_1,\ q_2\in Q\},$$

где ω — заданная полуметрика, т. е. функционал на $Q \times Q$, удовлетворяющий условиям

$$\omega(q_1, q_2) = \omega(q_2, q_1), \quad \omega(q, q) = 0,$$

$$\omega(q_1, q_3) \leqq \omega(q_1, q_2) + \omega(q_2, q_3) \ \ \forall q, q_1, q_2, q_3 \in Q.$$

В этом случае [7]

$$P^t_{H\omega}(x) = \{z \in H_\omega : x^*(q) - \rho - t \leqq z(q) \leqq x_*(q) + \rho + t \ \ \forall q \in Q\},$$

$$\rho = \rho(x, H_\omega) = \frac{1}{2} \| x^* - x_* \|,$$

где

$$x^*(q) = \max_{\tau \in Q} [x(\tau) - \omega(\tau, q)], \quad x_*(q) = -(-x(q))^*.$$

Для $y \in C(Q)$ обозначим

$$R(q) = \{\tau \in Q : x(\tau) - \omega(\tau, q) = \max_{\xi \in Q} [x(\xi) - \omega(\xi, q)]\},$$

$$G(q) = \{\tau \in Q : x(\tau) + \omega(\tau, q) = \min_{\xi \in Q} [x(\xi) + \omega(\xi, q)]\},$$

$$R = \bigcup_{q \in Q} R(q), \quad G = \bigcup_{q \in Q} G(q).$$

Имеет место соотношение

(3) $$(x + \lambda y)^*(q) = x^*(q) + \lambda \max_{\tau \in R(q)} y(\tau) + o(\lambda).$$

Соотношение (3) выполняется равномерно по $q \in Q$, если функция $y(\tau)$ постоянна на $R(q)$ при каждом $q \in Q$. В частности, это справедливо в случаях: 1) $R(q)$ одноточечно для любого $q \in Q$, 2) $R \cap \operatorname{supp} y = \varnothing$, 3) $y = \mathrm{const}$. Функционал $\rho(\lambda) = \rho(x + \lambda y, H_\omega)$ выпуклый, поэтому существует односторонняя производная $\partial\rho/\partial y = \lim_{\lambda \to +0} \lambda^{-1}(\rho(\lambda) - \rho(0))$. Для фиксированных $x, y \in X$ наряду с множеством $P^t_{H_\omega}(x + \lambda y)$ рассмотрим

$$B^t(\lambda) = \{z \in H_\omega : x^*(q) - \rho(0) - t + \lambda [\max_{\tau \in R(q)} y(\tau) - \partial\rho/\partial y]$$
$$\leqq z(q) \leqq x_*(q) + \rho(0) + t + \lambda [\min_{\tau \in G(q)} y(\tau) + \partial\rho/\partial y] \ \forall q \in Q\}.$$

Теорема 4. *Пусть Q — компакт, $x, y \in C(Q)$. Если функция $y(\tau)$ постоянна на каждом из множеств $R(q)$, $G(q)$, $(q \in Q)$, то*

$$h(P^t_{H_\omega}(x + \lambda y), B^t(\lambda)) = o(\lambda) \ (\lambda \to +0, \ t \geqq 0).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Holmes, B. Kripke. Smoothness of approximation. *Michigan Math. J.*, **15**, 1968, 225—228.
2. A. Kroo. Differential properties of the operator of best approximation. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **30**, 1977, 319—331.

3. J. Kruskal. Two counterexamples: a discontinuous envelope function and a nondifferentiable nearest—point mapping. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **23**, 1969, 697—703.
4. В. И. Бердышев. О дифференцируемости метричсской проекции. — В: Труды Межд. конф. Функции, ряды, операторы, Будапешт, 1980.
5. J. A. Glarkson. Uniformly convex spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **40**, 1936, No 3, 396—414.
6. R. Holmes. Smoothness of certian metric projection on Hilbert space. *Trans. Amer. Math. Soc..*, **184**, 1973, 87—100.
7. В. И. Бердышев. Устойчивость метрической проекции на некоторые классы непрерывных функций. — В: Тезисы докладов конф. „Методы математического программирования и их программное обеспечеиие". Свердловск, 1981, 20—21.

Институт математики и механики УНЦ АН СССР Свердловск СССР

Получено 15 июня 1981 г.