КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'81
София, 1983, с. 38—46

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
Sofia, 1983, p. 38—46

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ КУСОЧНО-ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

А. П. Буланов

Резюме. Основным результатом работы является следующее утверждение. Если $f(x)$ — кусочно-выпуклая функция на $[0;1]$ и ее модуль непрерывности $\omega(\delta, f) \leqq C_1(\ln(e/\delta))^{-\gamma}$, $\gamma>0$, то рациональное равномерное уклонение $R_n(f,[0,1]) \leqq C_2(n^{-1}\ln n)^{\bar{\gamma}}$, $\bar{\gamma}=\min\{2;\gamma\}$, где $n \geqq 2$, C_1 и C_2 не зависят от n.

Пусть $f(x)$, $x \in \Delta$ — непрерывная функция, $\omega(\delta, f)$ — ее модуль непрерывности, $R_n(f, \Delta)$ — наилучшее чебышевское приближение f на отрезке Δ рациональными функциями порядка не выше n $(n=1, 2, \ldots)$, т. е.

$$R_n(f, \Delta)=\inf_{R(x)} \max_{x \in \Delta} |f(x)-R(x)|,$$

где infimum берется по всем рациональным функциям степени не выше n.

В [1] Попов и Сабадош доказали теорему о локализации, из которой, в частности, следует, что если f кусочно-выпуклая и $f \in \operatorname{Lip}\alpha$, $0<\alpha\leqq 1$, то порядок рациональных приближений такой же, как и для выпуклой функции из $\operatorname{Lip}\alpha$. Если же для кусочно-выпуклой функции $\omega(\gamma, f)<c(\ln(e/\delta))^{-\gamma}$, $\gamma>0$, то можно только гарантировать по этой теореме (и с использованием последующих результатов по приближению выпуклых функций), что $R_n(f, [0;1])=O(n^{-1})^{\bar{\gamma}/2}$, где $\bar{\gamma}=\min(4, \gamma)$.

В первой части этой работы методами Гончара [2], Попова и Сабадоша [1] и Буланова [3] доказывается аналогичная теорема, основное содержание которой сформулировано в виде следствия (см. (9)).

Ниже будем считать, что $f(x) \neq \text{const}$ и $\|f\|=\max\{|f(x)|: 0 \leqq x \leqq 1\}$.

Теорема 1. *Пусть* $f(x)$, $x \in [0, 1]$, *имеет* $\omega(\delta, f) \leqq \omega(\delta)$ *и отрезок* $[0;1]$ *имеет разбиение* $0=a_0<a_1<\ldots<a_l=1$, *такое, что* $\max\{R_n(f, [a_{k-1}, a_k]): 1 \leqq k \leqq l\} \leqq m_n \|f\|$, *тогда для всех* $n>n(f)$

$$(1)\qquad R_{4nl}(f, [0;1]) \leqq 7m_n\|f\|+5\omega(6\exp((\ln m_n-2^{-1}\ln(50l))^{-1}(n-2))).$$

Доказательство. Пусть σ удовлетворяет неравенствам $0<\sigma<\min\{(a_k-a_{k-1}): 1 \leqq k \leqq l\}$ и в остальном пока произвольно.

Рассмотрим отрезки $I_k=[a_{k-1}, a_k]$, $k=1, 2, \ldots, l$ и $\Delta_1=[0;a_1+\sigma]$, $\Delta_k=[a_{k-1}-\sigma; a_k+\sigma]$, $k=2, 3, \ldots, l-1$, $\Delta_l=[a_{l-1}-\sigma; 1]$. Вначале докажем, что

$$(2)\qquad R_{2n}(f,\Delta_k)\leq R_n(f,I_k)+\omega(\sigma,f)+2\|f\|m_n^2$$

для любого $k=1, 2, \ldots, l$.

Пусть $r_{kn}(x)$ — рациональная функция порядка не выше n, которая приближает функцию $f(x)$ на отрезке I_k так, что $\max\{|f(x)-r_{kn}(x)|: x\in I_k\}=R_n(f, I_k)$. Рассмотрим линейное преобразование отрезка Δ_k в отрезок I_k при помощи функции $\xi^{(k)}=(a_k-a_{k-1}+2\sigma)^{-1}(a_k-a_{k-1})(x-a_{k-1}+\sigma)+a_{k-1}$. В частности, если $\xi^{(k)}=a_{k-1}$, то $x=a_{k-1}-\sigma$, а если $\xi^{(k)}=a_k$, то $x=a_k+\sigma$. В связи с этими преобразованиями отрезков определим рациональные функции $\bar r_{kn}(x)=r_{kn}(\xi^{(k)})=r_{kn}(x)(1+(\|f\|^{-1}m_n r_{kn}(\xi^{(k)}))^2)^{-1}$, $k=1, 2,\ldots, l$, которые имеют порядок не выше $2n$. Кроме того,

$$(3)\qquad \max_{-\infty<x<\infty}|\bar r_{kn}(x)|\leq(2m_n)^{-1}\|f\|\quad \text{для любого}\quad k=1, 2, \ldots, l.$$

Не нарушая общности в рамках этой работы, будем считать, что $m_n>\exp(-n^{1/2})$.

Для достаточно большого n_0 и для всех $n>n_0$ при $x\in[a_{k-1}-\sigma, a_k+\sigma]$ имеем

$$|f(x)-\bar r_{kn}(x)|\leq|f(x)-f(\xi^{(k)})|+|f(\xi^{(k)})-r_{kn}(\xi^{(k)})|$$

$$+|r_{kn}(\xi^{(k)})-\bar r_{kn}(x)|\leq\omega(\sigma,f)+R_n(f,I_k)+|r_{kn}(\xi^{(k)}|^3(\|f\|^{-1}m_n)^2.$$

Таким образом, неравенство (2) доказано для любого $k=1, 2, \ldots, l$.

Обратимся теперь к основной лемме работы [3]. Учитывая (3) и (2), имеем

$$(4)\qquad \bar M_n\stackrel{\text{def}}{=}\max_{1\leq k\leq l}\sup_{x\in[0;1]}|f(x)-\bar r_{kn}(x)|\leq(2m_n)^{-1}\|f\|+\|f\|,$$

$$(5)\qquad \bar m_n\stackrel{\text{def}}{=}\max_{1\leq k\leq l}\sup_{x\in\Delta_k}|f(x)-\bar r_{kn}(x)|\leq m_n\|f\|+\omega(\sigma,f)+2m_m^2\|f\|.$$

Согласно этой лемме по заданному разбиению $0=a_0<a_1<\ldots<a_l=1$ и некоторому числу $t\geq2$ можно построить систему рациональных функций $\{v_k(x)\}_{k=1}^l$ такую, что $\deg V_i\leq\left[1+t\ln\frac{6}{\sigma}\right]$ и

$$(6)\qquad \max_{0\leq x\leq1}|f(x)-\sum_{k=1}^{l}\bar r_{kn}(x)V_k(x)|\leq5\bar m_n+50\bar M_n\, l\exp\{-4t\}.$$

При достаточно большом n_0 для всех $n\geq n_0$ имеем неравенство $M_n^{-1}m_n\|f\|\leq50e^{-8}l$, поэтому можно положить

$$(7)\qquad t=4^{-1}\ln(50l(m_n\|f\|)^{-1}\bar M_n).$$

Из этото определения видно, что t не зависит от σ и $t\geq2$. Крмое того, учитывая, что при $m_n\leq1/4$ из неравенства (4) следует неравенство $(m_n\|f\|)^{-1}\bar M_n\geq m_n^{-2}$, мы имеем $t\geq4^{-1}(\ln50l+2\ln m_n^{-1})$.

Если через N обозначить порядок рациональной функции $\Sigma_{k=1}^{l}\bar{r}_{kn}(x)V_k(x)$ и положить $\sigma=6\exp(-(n-2)/2t)$, то получим неравенства

$$N\leq 4l[1+t\ln\frac{6}{\sigma}]+\sum_{k=1}^{l}\deg\bar{r}_{kn}\leq 4l+4lt\ln\frac{6}{\sigma}+2nl=4nl, \tag{8}$$

$$\sigma\leq 6\exp((n-2)/(\ln m_n-\frac{1}{2}\ln 50l)).$$

Из определения t по формуле (7) вместо второго слагаемого в правой части (6) можно подставить величину $m_n\|f\|$, а учитывая неравенство (8) и неравенство (5) при $n\geq n_0$, из (6) окончательно получим

$$R_{4nl}(f,\ [0;\ 1])\leq \max_{0\leq x\leq 1}|f(x)-\sum_{k=1}^{l}\bar{r}_{kn}(x)V_k(x)|\leq 5\bar{m}_n+m_n\|f\|$$

$$\leq 5m_n\|f\|+5\omega(\sigma,f)+10m_n^2\|f\|\leq 7m_n\|f\|$$

$$+5\omega(6\exp((\ln m_n-\frac{1}{2}\ln 50l)^{-1}(n-2)).$$

Теорема 1 доказана.

Следствие. *Пусть* $f(x)$, $x\in[0;1]$ — *кусочно-выпуклая функция и пусть* $\omega(\delta,f)\leq\|f\|(\ln e/\delta)^{-\gamma}$, $\gamma>0$, *тогда для всех* $n\geq 2$

$$R_n(f,\ [0;\ 1])<C(\ln n/n)^{\bar{\gamma}},\quad \bar{\gamma}=\min(\gamma,\ 2), \tag{9}$$

где C не зависит от n.

Доказательство. Пусть отрезок $[0;1]$ имеет разбиение $0=a_0<a_1\ldots<a_l=1$, такое, что $f(x)$ на каждом частичном отрезке $\Delta_k=[a_{k-1},a_k]$, $k=1,\ 2,\ldots,\ l$, выпукла и имеет указанный модуль непрерывности. Тогда (см. [4, 5])

$$R_n(f,\ \Delta_k)\leq C_{\gamma}^{(k)}\|f\|\,n^{-1-\gamma'}\ln^2 n,$$

где $\gamma'=\min(\gamma,\ 1)$ и все $C_{\gamma}^{(k)}\geq 0$ $(k=1,\ 2,\ldots,\ l)$ зависят только от γ. Пусть $C_\gamma=\max\{C_{\gamma}^{(k)}:1\leq k\leq l\}>0$, тогда можно взять $m_n=C_\gamma n^{-1-\gamma'}\ln^2 n$. Из теоремы 1 получаем (для всех $n\geq n_0$)

$$R_{4ln}(f,\ [0;\ 1])\leq 7C_\gamma\|f\|\ln^2 n/n^{1+\gamma'}+5\|f\|(\ln(e/6)$$
$$+(\ln m_n^{-1}+2^{-1}\ln 50l)^{-1}(n-2))^{-\gamma}$$

$$\leq 7C_\gamma\|f\|\ln^2 n/n^{1+\gamma'}+C_1\|f\|(\ln n/n)^{\gamma}\leq C_2(\ln n/n)^{\bar{\gamma}},$$

где $\bar{\gamma}=\min(\gamma,\ 2)$, C_2 не зависит от n.

Если N — степень рациональной функции наименьшего уклонения от функции $f(x)$ на отрезке $[0;1]$, то мы доказали неравенство (9) только для степеней, представимых в виде $N=4ln$, где $n\geq n_0$. Но так как

$$R_{4ln}(f,[0;\ 1])\leq C_2(\frac{\ln n}{n})^{\bar{\gamma}}(\frac{n+1}{n+1}\cdot\frac{4l}{4l})^{\bar{\gamma}}$$

$$=C_2\left(\frac{n+1}{n}4l\right)^{\bar{\gamma}}\cdot\left(\frac{\ln n}{4l(n+1)}\right)^{\bar{\gamma}}\leq C_3\left(\frac{\ln(4l(n+1))}{4l(n+1)}\right)^{\bar{\gamma}},$$

где C_3 не зависит от n, то неравенство (9) справедливо для всех N, удовлетворяющих неравенствам $4ln\leq N\leq 4l(n+1)$, т. е. для всех $N\geq N_0=4ln_0$.

Неравенство (9) с другой постоянной C_3', не зависящей от n, годится также для всех N, $2\leq N\leq N_0$, так как

$$R_N(f,[0,1])\leq\frac{1}{2}\|f\|\leq\frac{1}{2}\|f\|\left(\frac{N_0}{\ln N_0}\right)^{\bar{\gamma}}\cdot\left(\frac{\ln N}{N}\right)^{\bar{\gamma}}.$$

Если положить $C=\max(C_3,C_3')$, то неравенство (9) доказано для всех $N=2,3,\ldots$.

Замечание. Оценка (9) является неулучшаемой, если пренебречь логарифмическим множителем $(\ln n)^{\bar{\gamma}}$, так как для γ, $0<\gamma\leq 2$, это показывает неравенство Гончара [2]

$$R_n(\varphi,[-1;1])>C\gamma^{-1},\quad\text{где}\quad\varphi(x)=\begin{cases}0, & -1\leq x\leq 0.\\ (\ln(e/x))^{-\gamma}, & 0\leq x\leq 1.\end{cases}$$

Если же $\gamma>2$, то легко строится пример просто выпуклой на $[0;1]$ функции $f^*\in\operatorname{Lip}1$, приближение которой $R_n(f^*,[0;1])>o(n^{-2})(n\to\infty)$.

В работах [4] и [5] было доказано, что если f выпукла на $[0;1]$ и $\omega(\delta,f)\leq\|f\|(\ln(e/\delta))^{-\gamma}$, $0<\gamma\leq 1$, то $R_n(f,[0;1])\leq C\|f\|n^{-1-\gamma}\ln^2 n$; в работе [4] были построены примеры выпуклых функций с модулями непрерывности $\omega(\delta,f)\leq(\ln(e/\delta))^{-\gamma}$, $0<\gamma\leq 1$, для которых

$$R_{n_k}(f,[0;1])>n_k^{-1-\gamma}\quad\text{при}\quad 0<\gamma<1,$$

$$R_{n_k}(f,[0;1])>n_k^{-2}\ln^2 n_k\quad\text{при}\quad\gamma=1,$$

где $n_k\to\infty$ при $k\to\infty$.

Гончар установил [6], что для аналитической функции $f(z)=(\ln(e/z))^{-\gamma}$, $\gamma>0$, справедливы неравенства

$$\frac{C_1(\varepsilon,\gamma)}{n^{2(1+\gamma)+\varepsilon}}\leq R_n\left(\left(\ln\frac{e}{x}\right)^{-\gamma},\ [0;1]\right)\leq\frac{C_2(\varepsilon,\gamma)}{n^{1+\gamma-\varepsilon}},$$

где $\varepsilon>0$ — любое.

В [7] Пекарский приводит оценку (без доказательства)

(10) $$R_n((\ln(e/x))^{-\gamma},\ [0;1])\asymp n^{-1-\gamma},\quad 0<\gamma<1.$$

Ниже, во второй части настоящей работы, доказывается неравенство

(11) $$R_n((\ln(e/x))^{-\gamma},\ [0;1])>C_\gamma n^{-1-\gamma}$$

при любом $\gamma>0$. Так как А. А. Пекарский анонсировал оценку (10), то в формулировке теоремы 2 будем брать $\gamma\geq 1$.

Теорема 2. *Для любого $\gamma\geq 1$ и любого $n=1,2,\ldots$ справедливо неравенство $R_n((\ln(e/x))^{-\gamma},[0;1])>C_\gamma n^{-1-\gamma}$.*

Доказательство. Построим конкретную рациональную функцию порядка n и убедимся, что в некоторых последовательных точках

(12) $$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_{2n+2},$$

расположенных на отрезке $[0;\,1/e^2]$, разность

(13) $$\ln(x^{-1})^{-\gamma}-R_n(x)$$

принимает значение по абсолютной величине, большее, чем $\beta_{n\gamma}$ (величину $\beta_{n\gamma}$ определим позже), и с чередующимися знаками. Тогда по теореме Валле-Пуссена (см. [8])

(14) $$\max\{|(\ln x^{-1})^{-\gamma}-\bar{R}_n(x)|:\ 0\leqq x\leqq e^{-2}\}\geqq\beta_{n\gamma},$$

где $\bar{R}_n(x)$ — рациональная функция наилучшего равномерного приближения функции $(\ln x^{-1})^{-\gamma}$ на отрезке $[0;\,e^{-2}]$.

Введем обозначения. Будем ниже считать, что $\gamma>0$ — любое. Пусть $M=M_\gamma=\max\{\gamma^{-1}27,\ (3\gamma)^{3\gamma}\}$, $B=B_\nu=M/2$.

$$B_{n\gamma}=1/(M^2n^{1+\gamma}),\quad \sigma=\sigma_{n\gamma}=1/(Mn^{1+\gamma}),\quad y(x)=(\ln x^{-1})^{-\gamma},\quad y(0)=0.$$

Рассмотрим рациональные функции

$$r_1(x)=\sigma\frac{B(1+\nu_1)}{B+2(1+\nu_1)}\left(\frac{2}{B}+\frac{x}{x+\nu_1t_1}\right),$$

где $t_1=\gamma_1=\exp(-(Mn^{1+\gamma})^{-1/\gamma})$;

$$r_k(x)=\sigma(1+\nu_k-\nu_{k-1})x/(x+\nu_kt_k),$$

где

$$\nu_k=\exp\left(-\frac{1}{2}(Mn^{1+\gamma})^{1/\gamma}((k-1)^{-1/\bar{\gamma}}k^{-1/\gamma})\right),\ t_k=\exp(-(k^{-1}Mn^{1+\gamma})^{1/\gamma}),$$

$$k=2,\ 3, \ldots,\ n.$$

Вначале найдем на отрезке $[0,\,t_1]$ точки $x_1<x_2<x_3<x_4$, в которых разность $y(x)-(r_1(x)-B^{-1}\sigma)$ принимает значения по абсолютной величине, бо̀льшие, чем $B^{-1}\sigma-B^{-2}4\sigma$ и с чередующимися знаками. Затем найдем пары точек x_{2k+1}, x_{2k+2}, на отрезках $[t_{k-1},\,t_k]$, в которых разность $y(x)-(r_k(x)+\sigma(k-1)-\sigma/B)$ принимает значения по абсолютной величине, бо̀льшие, чем σ/B и с разными знаками. После этого убедимся, что сумма $R_n(x)=\Sigma_{k=1}^n r_k(x)$ будет удовлетворять условиям для применения теоремы Валле-Пуссена.

Итак, найдем точки x_1, x_2, x_3, x_4 на отрезке $[0;\,t_1]$. Из определения функций $y(x)$ и $r_1(x)$ непосредственно вытекает

(15) $$y(0)-r_1(0)+B^{-1}\sigma=-2\sigma(B+2(1+\nu_1))^{-1}(1+\nu_1)+B^{-1}\sigma\leqq-B^{-1}\sigma+B^{-2}4\sigma.$$

Будем брать $x_1=t_0=0$.

Пусть на отрезке $[0;\,t_1]$ $y(x)=\sigma q^\gamma$, $0\leqq q\leqq1$, тогда $x=\exp(-q^{-1}\times(Mn^{1+\gamma})^{1/\gamma})$. Если точке x_2 соответствует q_2 такое, что $q_2^\gamma=4/B$, тогда $y(x_2)=4\sigma/B$. Оценим значение рациональной функции $r_1(x)$ в точке x_2. Имеем

$$r_1(x_2)=\sigma(B+2(1+\nu_1))^{-1}(1+\nu_1)B(2/B$$

$$+(1+\exp)(Mn^{1+\gamma})^{1/\gamma}((\frac{B}{4})^{1/\gamma}-2)))^{-1})<B^{-1}3\sigma.$$

Отсюда

(16) $$y(x_2)-r_1(x_2)+B^{-1}\sigma>-B^{-1}3\,.\,\sigma+B^{-1}4\,.\,\sigma+B^{-1}\sigma=B^{-1}2\sigma.$$

Положим теперь $q_3^\gamma=(B-3)/B$, тогда

$$q_3^{-1}=(\frac{B}{B-3})^{1/\gamma},\qquad x_3=\exp\{-(Mn^{1+\gamma})^{1/\gamma}(\frac{B}{B-3})^{1/\gamma}\},$$

$$r_1(x_3)=\sigma(B+2(1+\nu_1))^{-1}(1+\nu_1)B2B^{-1}$$
$$-(1+\exp(-(Mn^{1+\gamma})^{1/\gamma}(2-(B/(B-3))^{1/\gamma}))^{-1}).$$

Так как $2-(B/(B-3))^{1/\gamma}\geqq 1/2$ и $(B+2(1+\nu_1))^{-1}B(1+V_1)>1-2B^{-1}$, получаем

$$r_1(x_3)\geqq\sigma(B+2(1+\nu_1))^{-1}(1+\nu_1)B(2/B+1/(1+\sqrt{\nu_1}))>\sigma(1-\sqrt{\nu_1})>\sigma(1-1/2B).$$

Но $y(x_3)=\sigma(1-3/B)$, поэтому

(17) $$y(x_3)-r_1(x_3)+B^{-1}\sigma<-3\sigma/2B.$$

Если положить $x_4=t_1$, то $r_1(x_4)=y(x_4)=\sigma$ и

(18) $$y(x_4)-r_1(x_4)+B^{-1}\sigma=B^{-1}\sigma.$$

Таким образом, в точках x_1, x_2, x_3, x_4 рациональная функция первого порядка $r_1(x)-\sigma/B$ отклоняется от функции $y(x)$ по абсолютному значению больше, чем $B^{-1}\sigma-B^{-2}4\sigma$, и это отклонение имеет чередующиеся знаки.

В качестве точек $x_5, x_6, \ldots, x_{2n+2}$ последовательности (12) будем брать точки парами x_{2k+1}, x_{2k+2} на полусегментах $(t_{k-1}, t_k]$ $(2\leqq k\leqq n)$, содержащихся в отрезке $[0; 1/e^2]$.

Пусть $x\in(t_{k-1}, t_k)$, $k=2, 3, \ldots, n$. Положим

$$x_{2k+1}=\exp(-(Mn^{1+\gamma})^{1/\gamma}(k-3/B)^{-1/\gamma}),\quad x_{2k+2}=t_k,$$

тогда

$$y(x_{2k+1})=\sigma(k-3/B);\qquad y(x_{2k+2})=k\sigma;$$

$$r_k(x_{2k+1})=\sigma(1+\nu_k-\nu_{k-1})/(1+\exp(-\frac{1}{2}(Mn^{1+\gamma})^{1/\gamma}((k-1)^{-1/\gamma}$$
$$+k^{-1/\gamma}-2(k-3/B)^{-1/\gamma})))$$

$$\geqq\frac{\sigma}{1+\exp(-(2\gamma)^{-1}M^{1/\gamma}(n/k)^{(1+\gamma)/\gamma}(1-6/B))};$$

$$r_k(x_{2k+2})=r_k(t_k)=\sigma\frac{1+\nu_k-\nu_{k-1}}{1+\nu_k}<\sigma(1-\exp(-\frac{M^{1/\gamma}}{2\gamma})).$$

По определению $12<B<\exp((4\gamma)^{-1}M^{1/\gamma})$, поэтому

$$r_k(x_{2k+1})>\sigma(1-1/B) \quad \text{при любом} \quad k=2,\ 3,\ \dots,\ n.$$

Отсюда можно сделать вывод, что

$$y(x_{2k+1})-r_k(x_{2k+1})-(k-1)\sigma+\sigma/B\leqq-\sigma/B; \tag{19}$$

$$y(x_{2k+2})-r_k(x_{2k+2})-(k-1)\sigma+\sigma/B>\sigma/B. \tag{20}$$

Теперь покажем, что рациональная функция

$$R_n(x)=-\sigma/B+\sum_{k=1}^{n} r_k(x) \tag{21}$$

на отрезке $[t_{k-1},\ t_k]$ мало отличается (не более, чем на $\sigma/2B$) от функции $r_k(x)+(k-1)\sigma-\sigma/B$, поэтому неравенства (19) и (20) вместе с неравенствами (15), (16), (17) и (18) будут равносильны неравенствам

$$y(x_{2k+1})-R_n(x_{2k+1})<-\sigma/2B, \tag{22}$$

$$y(x_{2k+2})-R_n(x_{2k+2})>+\sigma/2B \tag{23}$$

для всех $k=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n$, а это и завершит доказательство теоремы.

Пусть $x\in(t_{l-1},\ t_l]$ $(l=1,\ 2,\ \dots,\ n)$, тогда $x=\exp\{-(Mn^{1+\gamma})^{1/\gamma}(l-1+\theta)^{-1/\gamma}\}$, где $0<\theta\leqq 1$. Оценим $\sigma^{-1}\Sigma_{k=l+1}^{n} r_k(x)$ сверху на $(t_{l-1},\ t_l]$. Имеем

$$\sum_{k=l+1}^{n}\frac{1+\nu_k-\nu_{k-1}}{1+\nu_k t_k x^{-1}}\leqq\sum_{k=l+1}^{n}\frac{1+\nu_k-\nu_{k-1}}{1+\exp\{1/2(Mn^{1+\gamma})^{1/\gamma}[l^{-1/\gamma}-k^{-1/\gamma}]\}}.$$

Разность $l^{-1/\gamma}-k^{-1/\gamma}$ представим в виде $(l+j-j)^{-1/\gamma}-(l-j)^{-1/\gamma}$, где $j=k-l$ $(j=1,\ 2,\ \dots,\ n-l)$, и оценим ее снизу. Тогда

$$l^{-1/\gamma}-k^{-1/\gamma}=(l+j)^{-1/\gamma}((1-j/(l+j)^{-1/\gamma}-1)\geqq\gamma^{-1}n^{-(1+\gamma)/\gamma}\,.\,j.$$

При помощи этого неравенства легко оценивается сумма

$$\sigma^{-1}\sum_{k=l+1}^{n} r_k(x)\leqq\sum_{j=1}^{n-l}(1+v_{l+1}-\nu_{l+j-1})/\exp((2\gamma)^{-1}M^{1/\gamma}\,.\,j)$$

$$\leqq(1+\nu_n)\sum_{1=1}^{n-l}\exp(-(2\gamma)^{-1}M^{1/\gamma}\,.\,j)$$

$$=(1+\nu_n)(1-\exp(-(2\gamma)^{-1}M^{1/\gamma}(n-l)))$$

$$\times(1-\exp(-(2\gamma)^{-1}M^{1/\gamma}))^{-1}\exp(-(2\gamma)^{-1}M^{1/\gamma}).$$

Так как правая часть не превосходит величины $1/8B$, то

$$\sum_{k=l+1}^{n} r_k(x)\leqq\sigma/8B \quad \text{при} \quad x\in(t_{l-1},\ t_l). \tag{24}$$

Обратимся теперь к сумме $\Sigma_{k=2}^{l-1} r_k(x)$ при $x\in(t_{l-1},\ t_l]$. Из определений $r_k(x)$ легко получается оценка сверху:

$$(25)\qquad \sum_{k=2}^{l-1} r_k(x) \leq \sigma \sum_{k=2}^{l-1} (1+\nu_k-\nu_{k-1})$$

$$=\sigma(l-2)+\sigma(\nu_l-\nu_1)<(l-2)\sigma+\sigma<(l-2)\sigma+\sigma/8B.$$

Так как $\nu_k > \nu_{k-1}$, то в оценке снизу имеем

$$\sum_{k=2}^{l-1} r_k(x) > \sigma \sum_{k=2}^{l-1} \left(1+\frac{1}{x}\nu_k t_k\right)^{-1} > \sigma \sum_{k=2}^{l-1} (1+\nu_k t_k/t_{l-1})^{-1} \geq \sigma \sum_{k=2}^{l-1} (1-\nu_k t_k/t_{l-1}),$$

и дело сводится к оценке сверху величин $\nu_k t_k/t_{l-1}$ $(k=2, 3, \ldots, l-1)$.

Пусть $k=l-j$, тогда

$$\nu_k \frac{t_k}{t_{l-1}} \leq \exp\left(-\frac{1}{2}(Mn^{1+\gamma})^{1/\gamma}[(k-1)^{-1/\gamma}-(l-1)^{-1/\gamma}]\right)$$

$$\leq \exp\left(-(2\gamma)^{-1}M^{1/\gamma}\left(\frac{n}{l-1}\right)^{(1+\gamma)/\gamma} j\right).$$

Используя эту оценку, получаем

$$\sigma \sum_{k=2}^{l-1} (1-\nu_k t_k/t_{l-1}) \geq \sigma(l-2) - \sigma \sum_{j=1}^{l-2} \exp\left(-(2\gamma)^{-1}M^{1/\gamma}\left(\frac{n}{l-1}\right)^{(1+\gamma)/\gamma} j\right)$$

$$\geq \sigma(l-2) = \sigma \exp(-(2\gamma)^{-1}M^{1/\gamma})(1-\exp(-M^{1/\gamma}/2\gamma))^{-1}.$$

Так как $9B < \exp M^{1/\gamma}/2\gamma$, то

$$(26)\qquad \sum_{k=2}^{l-1} r_k(x) > \sigma(l-2) - \sigma/8B.$$

К тому же рациональная функция $r_1(x)$ оценивается на луче $[t_1, \infty]$ так:

$$(27)\qquad \sigma \leq r_1(x) < \sigma + \sigma\nu_1(1+2(1+\nu_1)/B)^{-1} < \sigma + \sigma/8B.$$

Теперь неравенства (22) и (23) следуют из (24), из очевидного неравенства $\sum_{k=l+1}^{n} r_k(x) > 0$, из неравенств (25), (26) и (27) (см. также определение (21)). Из (22) и (23) следует (13), а из (13) по теореме Валле-Пуссена получаем (14) и из него (11). Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. A. Popov, J. Szabados. On a general localization theorem and some applications in the theory of rational approximation. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 25, 1974, No 1-2,165—170.
2. А. А. Гончар. О скорости рациональной аппроксимации непрерывных функций с характерными особенностями. *Мат. сб.*, **73**, 1967, № 4, 630—638.
3. А. В. Буланов. Рациональные приближения непрерывных функций с конечным изменением. *Изв. АН СССР, Сер. матем.*, **39**, 1975, № 5, 1142—1181.
4. А. П. Буланов. Приближение выпуклых функций с заданным модулем непрерывности рациональными функциями. *Мат. сб.*, 105, 1978, № 1, 3—27.

5. A. P. Bulanov, A. Hatamov. On rational approximation of convex functions with a given modulus of continuity. *Analysis Math.*, **4**, 1978, No 4, 237—246.
6. А. А. Гончар. Скорость рациональной аппроксимации и свойство однозначности аналитической функции в окрестности изолированной особой точки. *Мат. сб.*, **94**, 1974, № 2, 265—282.
7. А. А. Пекарский. Оценки высших производных рациональных функций и их приложение. *Известия АН БССР, Сер. физ.-мат. н.*, 1980, № 5, 21—28.
8. Н. И. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимации. Москва, 1965.

Обнинск СССР *Получено 12 июня 1981 г.*