КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'81
София, 1983, с. 47—51

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
Sofia, 1983, p. 47—51

ОПТИМАЛЬНЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Б. Г. Габдулхаев, Г. Д. Велев

Резюме. Для сингулярных интегралов с ядрами Коши и чебышевскими весами, понимаемых в смысле главного значения, предлагается оптимизация квадратурных формул с произвольными узлами. В частности, строятся и исследуются оптимальные по порядку квадратурные формулы на классах функций $F=WrH^{\omega}$ и $F=Z(M)$. При этом существенным образом используются обобщенные методы суммирования интерполяционных многочленов Лагранжа по узлам Чебышева первого рода и интерполяционные сплайны по равноотстоящим узлам.

Постановка задачи. В ряде интересных и важных прикладных задач [1, 2] встречаются сингулярные интегралы (с. и.) вида

$$S(\varphi\,;t)=\frac{\sqrt{1-t^2}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)\sqrt{1-\tau^2}},\quad -1\leqq t\leqq 1. \tag{1}$$

понимаемые в смысле главного значения по Коши [1]. Для вычисления с. и. (1) предложено большое число квадратурных формул (к. ф.), основанных на тех или иных идеях; подробный обзор этих результатов приведен в работе [2]. Сказанное выше делает актуальной задачу оптимизации квадратурных формул для с. и. (1), тем более что для ряда классов с. и. этот вопрос можно считать достаточно хорошо разработанным [3]. Ниже рассматривается оптимизация к. ф. вида

$$S_N(\varphi\,;t)=\sum_{k=1}^{N}A_k(t)\varphi(t_k),\quad -1\leqq t\leqq 1,\quad N=1,\ldots, \tag{2}$$

где $t_k=t_{k,N}, k=\overline{1,N}$ — произвольные узлы из $[-1,1]$, $A_k(t)=A_{k,N}(t), k=\overline{1,N}$ — произвольные непрерывные функции на $[-1,1]$. Заметим, что формулой (2) охватываются все известные (см. [2]) к. ф. для с. и. (1).

Пусть $R_N\varphi=R_N(\varphi\,;t)=S(\varphi\,;t)-S_N(\varphi\,;t)$ — остаточный член к. ф. (2), а $F=\{\varphi\}\subset C[-1,1]$ — некоторое множество непрерывных функций. Оптимальную оценку погрешности класса к. ф. (2) на классе F введем по формуле

$$V_N(F)=\inf_{\{t_k,\,A_j(t)\}}\ \sup_{\varphi\in F}\ \sup_{-1\leqq t\leqq 1}|R_N(\varphi\,;t)|. \tag{3}$$

Следуя [4, 3], введем следующее

Определение. Квадратурная формула

$$S_N^0(\varphi\,;t)=\sum_{k=1}^{N}A_k^0(t)\varphi(t_k^0),\quad -1\leq t\leq 1, \tag{3^0}$$

называется оптимальной, асимптотически оптимальной, оптимальной по порядку на классе F, если выполнено одно из условий соответственно;

$$\sup_{\varphi\in F}\|R_N^0\varphi\|=V_N(F),\ \sup_{\varphi\in F}\|R_N^0\varphi\|\sim V_N(F),\ \sup_{\varphi\in F}\|R_N^0\varphi\|\asymp V_N,$$

где $R_N^0\varphi=S(\varphi\,;t)-S_N^0(\varphi\,;t)$, $t_k^0=t_{k,N}^0\in[-1,1]$,

$$A_k^0(t)=A_{k,N}^0(t)\in C[-1,1],\ k=\overline{1,N},\ \|f\|=\sup\{|f(t)|:\ -1\leq t\leq 1\},$$

а знаки $\sim$ и $\asymp$ означают, как обычно, сильную и слабую эквивалетность соответственно.

В дальнейшем в качестве F будем брать известный класс W^rH^ω, где r — целое неотрицательное число, $\omega=\omega(\delta)$, $0<\delta\leq 2$ — данный модуль непрерывности, а также класс Зигмунда $Z=Z(M)$, где M — данное положительное число.

Основные результаты. Пусть $\omega(\varphi\,;\delta)$ — модуль непрерывности функции $\varphi(t)$ с шагом δ, $0<\delta\leq 2$, $T_k(t)=\cos k.\arccos t$, $U_k(t)=(1-t^2)^{-1/2}\sin(k+1).\arccos t$, $k=0,1,\ldots,$ — полиномы Чебышева степени k первого и второго родов, соответственно,

$$t_k^0=t_{k,N}^0=\cos((2k-1)/2N),\ k=\overline{1,N}, \tag{4}$$

а $\lambda_k^0=\lambda_{k,N}^0$ $(\lambda_0^0=1/2,\ k=\overline{1,N},\ N=1,2,\ldots)$ — одна из следующих матриц:

(4^0) а) $\lambda_k^0=1$; б) $\lambda_k^0=\cos(k\pi/(2N-1))$; в) $\lambda_k^0=(k\pi/2N)\operatorname{ctg}(k\pi/2N)$.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $F=W^rH^\omega$, где при $r=0$ дополнительно предполагается, что*

$$\int_0^1 t^{-1}\omega(t)dt<\infty,\ \int_0^\varepsilon t^{-1}\omega(t)dt=O\{\omega(\varepsilon)\ln(\varepsilon^{-1}\},\ \varepsilon\sim 0. \tag{5}$$

Тогда

$$V_N(W^rH^\omega)\asymp N^{-r}\ln N\omega(1/N), \tag{6}$$

*и оптимальной по порядку на классе F является к. ф.**

$$S_N^0(\varphi\,;t)=2N^{-1}\sum_{j=1}^{N}\varphi(_j^0)\sum_{k=1}^{N-1}\{1-(1-\lambda_k^0)^{r+1}\}T_k(t_j^0)U_k(t). \tag{7}$$

Теорема 2. *Пусть $F=Z(M)$. Тогда $V_N(Z)\asymp N^{-1}\ln N$, и оптимальной по порядку является к. ф. (7) при $\lambda_k^0=1$, $k=1,\overline{1,N-1}$.*

Теорема 3. *Пусть $F=Z(M)$ или $F=W^rH^\omega$ при $r=0$* и *$r=1$, где при $r=0$ выполняется условие (4). Тогда оптимальной по порядку является также к. ф. вида (3^0), полученная на основе аппроксимации плотности с. и. (1) интерполяционным сплайном первого порядка по равноотстоящим узлам $t_k^0=t_{k,N}^0\in[-1,1]$, $k=\overline{1,N}$.*

---

* Всюду ниже полагаем $\sum_{k=1}^{0}=0$.

О доказательствах теорем. Остановимся (хотя бы вкратце) на доказательствах теорем 1—3; они основаны на следующих леммах.

Лемма 1. *Пусть функция* $\varphi\in C[-1,1]$ *удовлетворяет условию* $\int_0^1 s^{-1}\omega(\psi;s)ds<\infty$, $\psi=\psi(\theta)=\varphi(\cos\theta)$, $0\leq\theta\leq\pi$. *Тогда для любого числа* ε, $0<\varepsilon\leq\pi/2$, *равномерно относительно* $t\in[-1,1]$ *справедлива оценка* $|S(\varphi;t)|\leq(4/\pi)\int\limits_0^\varepsilon\frac{\omega(\psi;s)ds}{s}+(2/\pi)\|\varphi(t)\|\ln(\pi/2\varepsilon)$.

Следствие. *Если* $\varphi(t)\in H_\beta$, $0<\beta\leq1$, *то*

$$\|S(\varphi;t)\|\leq\min\left\{\frac{2\|\varphi\|}{\pi\beta}\ln\frac{\pi e H(\psi;\beta)}{\|\varphi\|},\ \frac{2^\beta H(\psi;\beta)}{\beta\pi^{1-\beta}}\right\},$$

где $H(\psi;\beta)=\sup\limits_{\theta'\neq\theta''}\{|\psi(\theta')-\psi(\theta'')|\cdot|\theta'-\theta''|^{-\beta}\}$ — *наименьшая постоянная условия Гёльдера функции* $\psi(\theta)$, $0\leq\theta\leq\pi$, *при данном* β.

Заметим, что лемма 1 и ее следствие доказываются методом, предложенным в [3, §§ 4, 9 гл. III].

Лемма 2. *Равномерно относительно* $t\in[-1,1]$ *справедлива оценка*

$$|S(P_N\varphi;t)|\leq(4/\pi+(2/\pi)\ln(4N/\pi))\max\{|\varphi(t_j^0)|:1\leq j\leq N\},$$

где $P_N\varphi=P_N(\varphi;t)=a_0^{(N)}/2+\Sigma_{k=1}^{N-1}a_k^{(N)}T_k(t)$ — *интерполяционный полином Лагранжа функции* $\varphi\in C[-1,1]$ *по узлам* (4), *а* $a_k^{(N)}=a_k^{(N)}(\varphi)=2N^{-1}\Sigma_{j=1}^N\varphi(t_j^0)T_k(t_j^0)$, $k=\overline{0,N-1}$ — *соответствующие коэффициенты Фурье—Лагранжа—Чебышева.* Лемма 2 доказывается способом, предложенным в [5] или же в [3, гл. III, § 5].

Из известных результатов (см., например, [6] — [8], а также [3]) легко выводится следующая

Лемма 3. *Справедлива двусторонняя оценка* $\sup\{\|\varphi-P_N\varphi\|:\varphi\in W^rH^\omega\}\asymp N^{-r}\ln N\omega(1/N)$. Далее, функции $\varphi\in C[-1,1]$ поставим в соответствие многочлен вида

$$P_{N,r}\varphi=P_{N,r}(\varphi;t)=2N^{-1}\sum_{j=1}^N\varphi(t_j^0)\{1/2+\sum_{k=1}^{N-1}(1-(1-\lambda_k)^{r+1})T_k(t)T_k(t_j^0)\},\tag{8}$$

где $\lambda_k=\lambda_{k,N}(\lambda_0=1/2)$, $k=\overline{1,N-1}$, $N=1,2,\ldots$ — произвольная треугольная матрица чисел.

Лемма 4. *Для любых* $\lambda_k\neq1$, $r=0,1,\ldots$ и $N=1,2,\ldots$ *справедливы неравенства*

$$\|P_{N,r}\|\leq(1+\|P_{N,0}\|)^{r+1}-1,\tag{9}$$

где операторы $P_{N,0}$ и $P_{N,r}:C\to C=C[-1,1]$.

Следствие. Если матрицы $\lambda_{k,N}$ из (8) определены по формулам (4б) — (4в), то операторы $P_{N,r}$ ограничены по норме в совокупности (относительно N):

$$\sup_N\|P_{N,r}\|=\mathrm{const},\ P_{N,r}:C\to C.\tag{10}$$

Заметим, что доказательство этой леммы основано на тождестве

$$P_{N,r+1}=P_{N,0}+P_{N,r}-P_{N,0}P_{N,r}.\tag{11}$$

Из (11) выводится так называемая арифметико-геометрическая прогрессия, связывающая нормы операторов $P_{N,0}$, $P_{N,r}$, $P_{N,r+1}$, из которой, в свою очередь, легко получается (9). Для получения (10) используются оценки (9) и некоторые известные результаты по линейным методам суммирования рядов Фурье (см., например, в [7, 9]).

Л е м м а 5. *В условиях следствия леммы 4 справедлива двусторонняя оценка*

$$\sup\{\|\varphi-P_{N,r}\varphi\|:\varphi\in W^rH^\omega\}\asymp N^{-r}\omega(1/N). \tag{12}$$

Заметим, что доказательство оценки сверху в (12) ведется с помощью леммы 4, а для доказательства оценки снизу достаточно пользоваться известными результатами К о р н е й ч у к а [10] о верхних гранях наилучших равномерных приближений полиномами на классах типа W^rH^ω.

Теперь с помощью лемм 1—5 и методов, примененных при доказательстве теорем 27 и 29 гл. III книги [3], после ряда вычислений выводится вышеприведенная теорема 1.

Отметим, что доказательства теорем 2 и 3, по сравнению с теоремой 1, не представляют принципиальных трудностей; для этого достаточно пользоваться методами доказательств теорем 15 и 26 гл. III книги [3] и неравенствами (6) для оптимальной оценки погрешности (3).

Заключение. В заключение приведем ряд замечаний относительно оптимизации к. ф. (2) для с. и. (1).

1⁰. Следуя работе [11] и используя свойства с. и. (1), можно было бы рассматривать оптимизацию более общих к. ф., чем (2), а именно, к. ф. вида

$$S_N(\varphi\,;t)=\sum_{k=1}^{N}A_k(t)f_k(\varphi),\ -1\leq t\leq 1,$$

где $f_k=f_{k,N}$, $k=\overline{1,N}$ — некоторая система (вообще говоря, нелинейных) функционалов в пространстве $C[-1,1]$. При этом в основу исследований может быть положена известная теория поперечников компактов в функциональных пространствах, разработанная А. Н. К о л м о г о р о в ы м, Н. П. К о р н е й ч у к о м, В. М. Т и х о м и р о в ы м, С. Б. С т е ч к и н ы м и др. (см., например, в [8, 10]).

2⁰. Результаты, аналогичные теоремам 1 и 3, получаются также при оптимизации к. ф. с кратными узлами. При этом достаточно пользоваться методами работ [12, 13] (см. также [2]).

3⁰. Теоремы 1 — 3 можно доказать также с помощью результатов (см., например, [14, 15]) по аппроксимации в пространстве В. В. Иванова W, связанном с краевыми значениями интегралов типа Коши по единичной окружности и по отрезку $[-1,1]$, и с плотностью, совпадающей с функцией $\varphi(\tau)$ из с. и. (1). Однако для с. и. (1) предложенный выше способ доказательства со многих точек зрения нам представляется более эффективным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. Москва, 1968.
2. Б. Г. Габдулхаев. Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных и интегродифференциальных уравнений. *Итоги науки и техники. Мат. анализ*, **18**, 1980, 251—307.
3. Б. Г. Габдулхаев. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань, 1980.
4. С. М. Никольский. Квадратурные формулы. Москва, 1979.
5. Б. Г. Габдулхаев. Аппроксимация в *H*-пространствах и приложения. *Доклады АН СССР*, **223**, 1975, № 6, 1293—1296.
6. И. П. Натансон. Конструктивная теория функций. Москва, 1949.
7. В. К. Дзядык. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. Москва, 1977.
8. В. М. Тихомиров. Некоторые вопросы теории приближений. Москва, 1976.
9. С. Б. Стечкин. О приближении непрерывных периодических функций суммами Фавара. *Тр. Мат. инст. АН СССР*, **109**, 1971, 26—39.
10. Н. П. Корнейчук. Экстремальные задачи теории приближения. Москва, 1976.
11. Б. Г. Габдулхаев. Поперечники и оптимальные квадратурные формулы для сингулярных интегралов. *Доклады АН СССР*, **234**, 1977, № 3, 513—516.
12. Б. Г. Габдулхаев. Квадратурные формулы с кратными узлами для сингулярных интегралов. *Доклады АН СССР*, **227**, 1976, № 3, 531—534.
13. Б. Г. Габдулхаев, Р. Н. Шарипов. Оптимизация квадратурных формул с кратными узлами для сингулярных интегралов. *Изв. ВУЗ, Матем.* 1979, № 12, 62—66.
14. В. В. Иванов. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. Киев, 1968.
15. Б. Г. Габдулхаев. Об одном общем квадратурном процессе и его применении к приближенному решению сингулярных интегральных уравнений. *Доклады АН СССР*, **179**, 1968, № 3, 515—517.

Казанский государственный университет им. В. И. Ульянова-Ленина
Казань СССР

Получено 3 июня 1981 г.

Висш икономически институт „Карл Маркс"
София България