КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'81
София, 1983, с. 52—57

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
Sofia, 1983, p. 52—57

ОБ ОДНОМ АДАПТИВНОМ АЛГОРИТМЕ АППРОКСИМАЦИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ

И.-Й. Д. Добра, И. В. Межуева

Резюме. Предлагается адаптивный способ аппроксимации, основанный на построении по методу наименьших квадратов сглаживающего кубического сплайна дефекта 2, аппроксимирующего параметрическое представление исходной кривой с заданной степенью точности. Алгоритм предназначен для аппроксимации достаточно плавных кривых произвольной формы (замкнутых, спиралевидных и т. п.), заданных эмпирически полученной таблицей координат точек.

Алгоритм эффективен при обработке больших по объему массивов исходных данных, т. к. одна из основных идей алгоритма состоит в построении каждого очередного звена сплайна на отрезке максимальной длины, чем достигается значительное сжатие информации. Из достоинств алгоритма следует отметить достаточную гибкость в смысле возможностей приспосабливаться к поведению исходной кривой.

Получена точная оценка погрешности, в которую входят неустранимая погрешность и погрешность метода на некотором классе функций.

Постановка задачи. Пусть задана некоторая упорядоченная последовательность точек M_k, $k=\overline{1,N}$, $N\geqq 3$, своими координатами $\{x_k,\ y_k\}$ относительно некоторой прямоугольной системы координат OXY, описывающей кривую

$$F(x,\ y)=0, \tag{1}$$

допускающую параметрическое представление

$$x=\varphi_1(t),\ y=\varphi_2(t),\ 0\leqq t\leqq T, \tag{2}$$

где точкам M_k, $k=\overline{1,N}$, ставятся в соответствие значения параметра $t_k=t_{k-1}+h_k$, $k=\overline{1,N}$, $t_0=0$, причем $x_k=\varphi_1(t_k)$, $y_k=\varphi_2(t_k)$.

Параметризация выбрана таким образом, что функции $\varphi_\nu(t)$, $\nu=1,\ 2$, удовлетворяют условию Гёльдера степени $\alpha=1$ с константой L:

$$|\varphi_\nu(t')-\varphi_\nu(t'')|\leqq L\,|t'-t''|\quad \forall t', t'',$$

Под параметрическим кубическим сплайном дефекта 2, аппроксимирующим неявно заданную функцию (I), будем подразумевать пару кубических сплайнов дефекта 2 $S_\nu(t)$, $\nu=1,2$ $(0\leqq t\leqq T)$ с узлами τ_j, $j=\overline{1,K}$, $K\leqq N$, аппроксимирующих в некотором смысле функции (2) соответственно, задающие параметрическое представление функции (1).

Предполагается, что заданные координаты $\{x_{k_\delta}, y_{k_\delta}\}$, $k=\overline{1, N}$, определяются в результате измерений с некоторой погрешностью, которая из априорных соображений не превосходит величины δ:

$$|x_k - x_{k_\delta}| \leqq \delta_k^1, \quad |y_k - y_{k_\delta}| \leqq \delta_k^2, \; k=\overline{1, N},$$

$$\delta_k^\nu \leqq \delta, \; \nu=1, \; 2, \; k=\overline{1, N},$$

где $\{x_k, y_k\}$ — точные значения координат точек M_k, $k=\overline{1, N}$.

Пусть из физических соображений известно, что аппроксимируемая функция (1) является гладкой в смысле гладкости параметрического представления (2). Отсюда естественно вытекает постановка задачи аппроксимации.

Задача 1. Найти непрерывно дифференцируемые функции $S_\nu(t)$, реализующие $\inf I_\nu(S)$, где $I_\nu(S)=\int_\alpha^\beta S_\nu''(t)^2\,dt<\infty$, $\nu=1, 2$, в классе функций, удовлетворяющих при некотором заданном ε условиям $|S_1(x_k)-x_{k\delta}| \leqq \varepsilon$, $|S_2(y_k)-y_{k\delta}| \leqq \varepsilon$.

Другие постановки задачи сглаживания приведены в [2, 3].

Практическое получение решения задачи 1 весьма трудоемко, поэтому в дальнейшем будем рассматривать более упрощенную постановку задачи.

Задача 2. Найти коэффициенты и узлы сглаживающих кубических сплайнов $S_\nu(t)$, $\nu=1, 2$, дефекта 2, минимизирующих функционалы

$$\Phi_1(S)=\sum_{i=1}^{N} p_i\,(S_1(t_i)-x_{i\delta})^2+\lambda\int_\alpha^\beta [S_1''(u)]^2\,du,$$

$$\Phi_2(S)=\sum_{i=1}^{N} p_i\,(S_2(t_i)-y_{i\delta})^2+\lambda\int_\alpha^\beta [S_2''(u)]^2\,du$$

и удовлетворяющих в точках t_i, $i=\overline{1, N}$, неравенствам $|S_1(t_i)-x_{i\delta}| \leqq \varepsilon$, $|S_2(t_i)-y_{i\delta}| \leqq \varepsilon$, где $p_i\,(p_i>0)$, $\varepsilon\,(\varepsilon \geqq 0)$ — заданные числа, $\lambda\,(\lambda \geqq 0)$ — вспомогательный параметр.

При определении коэффициентов сплайнов $S_\nu(t)$, $\nu=1, 2$, должен быть реализован принцип адаптивности, в основе которого лежит:

А1) согласование производной сплайна в узловых точках со сглаженной производной, построенной по дискретно заданным исходным точкам;

А2) выделение „активных" [1] интервалов, трудных для аппроксимации с целью применения на этих отрезках специальных алгоритмов.

Количество узлов аппроксимирующей кривой должно быть значительно меньше числа исходных точек.

Эта задача представляет собой компромисс между построением идеально гладких функций $S_\nu''(t)=0$, $\nu=1, 2$, при $p_i=0$ и интерполяционных функций $S_1(t_i)=x_{i_\delta}$, $S_2(t_i)=y_{i_\delta}$ при $p_i \to \infty$, $i=\overline{1, N}$.

Существенное значение имеет выбор весов функций p_i, $i=\overline{1, N}$. Следует отметить, что чем точнее задана информация в точке, тем больше должно быть соответствующее значение параметра p_i. Можно воспользоваться алгоритмом выбора весовых множителей, предложенным в [5].

λ — здесь экспериментально определяемый регуляризируемый множитель, управляющий кривизной кривой.

Описание S-алгоритма. При использовании параметрического представления кривых кубическими сплайнами сразу возникает проблема выбора параметра t. Дело в том, что в данном случае сглаживание применяется не к кривой (1), а к описывающим ее функциям (2), гладкость которых зависит от способа параметризации. При неудачном выборе параметра эти функции могут оказаться „негладкими" даже для гладкой кривой. Естественно в качестве параметра выбирать длину ломаной, стягивающей точки исходной кривой. Такой параметр по значению близок к геометрической характеристике — длине дуги, как заданной, так и аппроксимирующей кривой. С вычислительной точки зрения проще брать параметр, для которого значения суть числа натурального ряда. S-алгоритм предусматривает возможность различной параметризации исходной кривой.

Второй существенный вопрос, возникающий при решении задачи 2 — как избежать осцилляций сплайнов $S_\nu(t)$, $\nu=1, 2$. В S-алгоритме накладываются ограничения на значение производных в узлах сплайнов. С этой целью вычисляется сглаженная [4] производная как наклон к параболе второго порядка, построенной в симметричной окрестности данного узла.

S-алгоритм основывается на локальных процедурах, каждая из которых содержательно представляет собой построение одного звена сплайнов $S_\nu(t)$, $\nu=1, 2$, т. е. нахождение узлов, ограничивающих это звено, и коэффициентов соответствующих полиномов третьего порядка с вычислением по этим коэффициентам значений сплайнов и их производных в узлах.

Минимальное число точек, для которого можно начинать построение звена сплайна, $m=3$, в противном случае нет единственности решения. Для повышения быстродействия алгоритма можно начинать построение звена с любого числа точек при наличии предварительных соображений о возможном количестве точек, охватываемых одним отрезком сплайна, исходя из информации о ходе кривой, например, $m=7$. Для звена, содержащего это число точек, вычисляются в начальной и конечной точках сглаженные производные V_j, V_n, $j=\overline{1, N-1}$, $n=\overline{3, N}$, построенные в симметричной окрестности, содержащей, например, $l=5$, 7 или 9 точек. Параметры m, l настраивают алгоритм на определенный класс кривых. Далее коэффициенты звеньев сплайнов $S_\nu(t)$, $\nu=1, 2$, определяются из условия минимизации функционалов:

$$\Phi_1(a_1)=\sum_{i=j}^{n} p_i(d_1+c_1t_i+b_1t_i^2+a_1t_i^3-x_{i_\delta})^2+\lambda\int_{t_j}^{t_n}(6a_1u+2b_1)^2du,$$

$$\Phi_2(a_2)=\sum_{i=j}^{n} p_i(d_2+c_2t_i+b_2t_i^2+a_2t_i^3-y_{i_\delta})^2+\lambda\int_{t_j}^{t_n}(6a_2u+2b_2)^2du$$

при следующих ограничениях: $S_\nu(t_j-0)=S_\nu(t_j+0)$, $S'_\nu(t_j)=V_j$, $S'_\nu(t_n)=V_n$, $\nu=1, 2$.

Имеет смысл выбирать параметр λ следующим образом: $\lambda=\lambda(\varepsilon)$. Локальная процедура заканчивает свою работу вычислением оценок:

$$D_1(S, \varphi)=\max\{|S_1(t_i)-x_{i_\delta}|: j\leq i\leq n\},$$
$$D_2(S, \varphi)=\max\{|S_2(t_i)-y_{i_\delta}|: j\leq i\leq n\}.$$

В случае выполнения условий

(3) $$D_\nu(S, \varphi) \leqq \varepsilon, \quad \nu = 1, 2,$$

локальная процедура повторяется для числа точек $m+1$, и так постепенно происходит накопление возможно большего числа точек, которые можно аппроксимировать одним звеном сплайна в заданном „коридоре" точности. Как только не выполняется хотя бы едно из условий (3), процесс наращивания точек останавливается. Для гарантии неслучайности образования узла сплайна алгоритм предусматривает продвижение еще на пару точек вперед. Если условие (3) не выполняется ни для одного из этих двух новых наборов точек, то процесс образования звена сплайна заканчивается, и осуществляется переход к построению следующего звена сплайна. Эффективно из соображений адаптации к особенностям хода исходной кривой образовывать узел сплайна не в последней точке предыдущего звена, а в точке с номером $E[2/3(j+n)] = [2/3(j+n)]$.

В случае невозможности построения в заданной полосе точности кубического сплайна даже для $m=3$, т. е. в случае, когда очередной интервал аппроксимации является „активным", алгоритм пробует построить с помощью описанной выше методики максимальное по числу охвата точек звено сплайна, используя сглаженные производные, построенные для $l=3$, что целесообразно на участках резкого изменения наклона кривой. Если и эта мера не приводит к образованию звена сплайна, содержащего число точек $m \geqq 3$, локальная процедура образует звено, состоящее из двух точек, причем координаты нового узла сплайна вычисляются по формулам

$$S_1(\tau_j) = [x_{i_\delta} - S_1(\tau_j)] + x_{i+1_\delta},$$
$$S_2(\tau_j) = [y_{i_\delta} - S_2(\tau_j)] + y_{i+1_\delta}, \quad i = j.$$

Таким образом с помощью локальных процедур, приспосабливаясь к ходу кривой, алгоритм обрабатывает весь исходный массив координат точек.

Ввиду специфики постановки задачи основная вычислительная процедура, состоящая в нахождении коэффициентов кубических полиномов, сводится к решению системы линейных уравнений порядка 4 обычным методом подстановки, что повышает быстродействие алгоритма. При обработке большого объема исходной информации возникает проблема роста параметра, что сказывается на обусловленности системы линейных уравнений при минимизации функционалов, т. к. в матрице присутствует член вида $\Sigma_{i=j}^n p_i t_i^6$. Алгоритм организован так, что весь объем информации поступает на обработку порциями не менее 40 точек. Этот параметр установлен экспериментально. В зависимости от параметризации его можно менять.

С помощью S-алгоритма не представляет трудности аппроксимировать пространственные кривые. Для этого следует оперировать с совокупностью трех сплайнов вместо двух.

Примечание. Существует программа, реализующая S-алгоритм, написанная на языке FORTRAN IV. Действие S-алгоритма проверялось на реальных кривых, взятых из практических задач.

Оценка неустранимой погрешности и погрешности метода в классе функций, удовлетворяющих условию Гёльдера. В качестве меры уклонения сплайнов $S_\nu(t)$ от кривых $\varphi_\nu(t)$ возьмем величины

$$R_\nu(S_\nu, \varphi_\nu) = \max\{|S_\nu(t) - \varphi_\nu(t)| : t \in [t_k, t_{k+1}]\}, \ \nu = 1, 2.$$

Теорема 1. *Пусть* $S_\nu(t, \varepsilon)$, $\nu = 1, 2$ — *сплайны, построенные при помощи S-алгоритма и* $\varphi_\nu(t) \in H_L$, *где* H_L — *класс функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с константой* $L(0 < L < \infty)$ *степени* $\alpha = 1$ *на* $[t_0, T]$. *Тогда для погрешности аппроксимации справедливы неулучшаемые оценки*: $R_\nu(S_\nu, \varphi_\nu) \leq Lh_k + 2(\varepsilon + \delta)$, $\nu = 1, 2$.

Доказательство опирается на точную оценку для интерполяционных сплайн-функций порядка $2r-1$ дефекта $r(r > 1)$, зависящих от фиксированного вектора функций на классе функций H_ω — классе функций, у которых модуль непрерывности не превосходит заданного модуля непрерывности, полученную в [6].

Ввиду равноправности составляющих пары сплайнов $S_\nu(t, \varepsilon)$, $\nu = 1, 2$, проведем доказательство, например, для сплайна $S_1(t, \varepsilon)$.

Впишем в сплайн ломаную γ с вершинами в точках, соответствующих значениям параметра t_k, $k = \overline{1, N}$. В точах t_k, $k = \overline{1, N}$, имеем $|S_1(t_k, \varepsilon) - x_k| \leq |S_1(t_k, \varepsilon) - x_{k_\delta}| + |x_{k_\delta} - x_k| \leq \varepsilon + \delta$. Следовательно, и для ломаной γ в этих точках

$$|\gamma(t_k) - x_k| \leq \varepsilon + \delta. \tag{4}$$

По предположению $\varphi_1(t) \in H_L[t_0, T]$, тогда нетрудно показать, что $\gamma(t) \in H_{L(\varepsilon, \delta, h_k)}[t_k, t_{k+1}]$, где $L(\varepsilon, \delta, h_k) = L + 2(\varepsilon + \delta)/h_k$.

Рассмотрим теперь отклонение

$$R_1(S_1, \varphi_1) = \max_{t \in [t_k, t_{k+1}]} |S_1(t) - \varphi_1(t)| \leq \max_{t \in [t_k, t_{k+1}]} |S_1(t) - \gamma(t)| + \max_{t \in [t_k, t_{k+1}]} |\gamma(t) - \varphi_1(t)|. \tag{5}$$

Учитывая (4) и предположение, что $\varphi_1(t) \in H_L[t_0, T]$, приходим к оценке второго слагаемого в (5):

$$\max|\gamma(t) - \varphi_1(t)| \leq \max|\gamma(t) - g(t)| + \max|g(t) - \varphi_1(t)| \leq \varepsilon + \delta + Lh_k/2,$$

где $g(t)$ — ломаная, вписанная в исходную кривую $\varphi_1(t)$ с вершинами в точках t_k, $k = \overline{1, N}$.

Первое слагаемое в (5) есть оценка погрешности интерполяционного кубического сплайна в классе функций $H_{L(\varepsilon, \delta, h_k)}[t_k, t_{k+1}]$. Используя оценку, приведенную в [6], получаем $\max\{|S_1(t) - \gamma(t)| : t \in [t_k, t_{k+1}]\} \leq h_k L(\varepsilon, \delta, h_k)/2$. Отсюда следует $R_\nu(S_\nu, \varphi_\nu) \leq [L + 2(\varepsilon + \delta)/h_k]h_k/2 + \varepsilon + \delta + Lh_k/2 = Lh_k + 2(\varepsilon + \delta)$.

Из теоремы 1 непосредственно вытекает следствие.

Следствие 1. Пусть при $N \to \infty$, $\max_{1 \leq k \leq N}|h_k| \to 0$, $\max_{1 \leq k \leq N}|\varepsilon_k| \to 0$ и $\max_{1 \leq k \leq N}|\delta_k| \to 0$. Тогда аппроксимирующие кривые $S_\nu(t)$, $\nu = 1, 2$, сходятся к исходным кривым $\varphi_\nu(t)$, $\nu = 1, 2$, т. е.

$$\max_{\nu = 1, 2}\left[\max_{t \in [t_0, T]}|S_\nu(t) - \varphi_\nu(t)|\right] \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

В качестве погрешности приближения кривой (1) параметрическим сплайном возьмем величину

$$R(t) = \sqrt{|S_1(t) - \varphi_1(t)|^2 + |S_2(t) - \varphi_2(t)|^2}.$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы 1, тогда для погрешности аппроксимации справедлива по норме пространства* $C[a, b]$ *следующая оценка*: $\| R(t) \|_{C[a, b]} \leqq \sqrt{2}\,[Lh_k + 2(\varepsilon + \delta)]$.

Доказательство опирается на результат теоремы 1. Легко получить $\| R(t) \|_{C[a, b]} \leqq \sqrt{\| S_1(t) - \varphi_1(t) \|^2_{C[a, b]} + \| S_2(t) + \varphi_2(t) \|^2_{C[a, b]}} = \sqrt{2}\,|\, Lh_k + 2(\varepsilon + \delta) \,|$.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. R. Rice. Adaptive approximation. *J. Approx. Theory*, **16**, 1976, No 4, 329-337.
2. С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин. Сплайны в вычислительной математике. Москва, 1976.
3. Н. С. Бахвалов. Численные методы. I. Москва, 1973, 256 — 263.
4. К. Ланцош. Практические методы прикладного анализа. Москва, 1961.
5. Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко. Методы сплайн-функций. Москва, 1980.
6. В. Л. Великин. О наилучшем приближении сплайн-функциями на классах непрерывных функций. *Мат. заметки*, 8, 1970, № 1, 41—46.

Институт кибернетики АН УССР
Киев *СССР*

Получено 24 июня 1981 г.