КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'81
София, 1983, с. 58—66

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
Sofia, 1983, p. 58—66

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Г. В. Жидков

Резюме. В метрике L_p, $1 \leqq p \leqq \infty$ рассматривается приближение функций $f(x)$, $1 \leqq x < \infty$ функциями $g_\sigma(x)$, которые являются целыми ограниченными функциями типа σ относительно θ в L_p, где $x = \operatorname{ch}\theta$. Указываются классы функций, а также необходимые и достаточные условия принадлежности к ним.

Далее с помощью усреднения и волнового оператора строятся функциональные пространства $\widetilde{H}$ и $\widetilde{B}$ для функций многих переменных в неограниченной области и исследуются их свойства.

С. Н. Бернштейном были доказаны на числовой оси $-\infty < x < \infty$ прямые и обратные теоремы о приближении ограниченной функции $f(x)$ целыми ограниченными функциями $G_\sigma(x)$ типа σ. В частности, было установлено:

Для того чтобы ограниченная функция $f(x)$ удовлетворяла условию Липшица $|f(x+h)-f(x)| \leqq Mh^\alpha$, необходимо и достаточно существование такой функции $G_\sigma(x)$ типа не выше σ, чтобы имело место неравенство $|f(x)-G_\sigma(x)| \leqq c/\sigma^\alpha$, где $0<\alpha<1$, постоянная M не зависит от $h>0$, C не зависит от σ [2].

Если функция $f(x)$ определена на луче $1 \leqq x < \infty$, то результат С. Н. Бернштейна необратим. В этом случае имеем аналогичный эффект, как и при приближении непериодической функции $f(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ алгебраическими полиномами [1, 4].

В работе указываются классы функций, в терминах которых справедлив аналог результата С. Н. Бернштейна для луча.

С помощью этих результатов строятся функциональные пространства $\widetilde{H}$ и $\widetilde{B}$ для функций многих переменных в неограниченной области.

В случае функций, суммируемых с квадратом, аналогичные результаты получены в работах [5, 6, 7].

В дальнейшем разные постоянные величины будем обозначать через C.

Пусть функция $f(x)$ из L_p имеет производную s-того порядка, принадлежащую к L_p с весом $(x^2-1)^{s/2}$.

Обозначим

$$\|f^{(s)}\|_{p,s} = \Big(\int_1^\infty |f^{(s)}(x)\,(x^2-1)^{s/2}|^p dx\Big)^{1/p}, \quad \|f\|_{p,0} = \|f\|_p, \quad 1 \leqq p \leqq \infty.$$

Вместо s-ой производной в соответствующих выражениях можно рассматривать s-ю степень дифференциального оператора

$$(1) \qquad L = d/dx\,[(x^2-1)d/dx].$$

В этом случае

$$\| L^s f \|_p = \left(\int_1^\infty | L^s f(x) |^p dx \right)^{1/p}.$$

Рассмотрим усреднение $f_h(x)$ функции $f(x)$

$$(2) \qquad f_h(x) = \pi^{-1} \int_0^\pi f(x \operatorname{ch} h + \sqrt{x^2-1} \operatorname{sh} h \cos \varphi)\, d\varphi.$$

Усреднение второго порядка $f_{hh}(x)$ является усреднением от $f_h(x)$.

Введем аналоги интегрального модуля непрерывности s-ой производной $\widetilde{\omega}(f^{(s)}, \delta)_p = \sup \{ \| f_h^{(s)}(x) - f^{(s)}(x) \|_{p,s} : 0 < h \leq \delta \}$ и модуля гладкости $\widetilde{\omega}_2(f^{(s)}, \delta)_p = \sup \{ \| f_{hh}^{(s)}(x) - L f_h^{(s)}(x) + f^{(s)}(x) \|_{p,s} : 0 < h \leq \delta \}$.

В дальнейшем в качестве аппарата приближения будем использовать функции $g_\sigma(x)$, которые строятся с помощью функций Мелера

$$(3) \qquad P_{-1/2+i\tau}(x) = \pi^{-1} \sqrt{2} \int_0^\theta (\operatorname{ch} \theta - \operatorname{ch} s)^{-1/2} \cos \tau s\, ds$$

и интегрального преобразования Мелера — Фока

$f(x) = \int_0^\infty \tau \operatorname{th} \pi\tau\, \Phi(\tau) P_{-1/2+i\tau} \cdot (x) d\tau$, где $\Phi(\tau) = \int_1^\infty f(x) P_{-1/2+i\tau}(x) dx$.

Пусть $\varphi(x) = \int_0^\infty \tau \operatorname{th} \pi\tau . \operatorname{ch}^{-4}\tau . \sin^4((\sigma/4)\operatorname{ch}\tau) P_{-1/2+i\tau}(x) d\tau$, где $\gamma_\sigma = \int_0^\infty \operatorname{ch}^{-4}\tau . \sin^4 (\sigma/4 \operatorname{ch} \tau) \operatorname{sh} \tau\, d\tau$.

Построим функцию

$$(4) \qquad g_\sigma(x) = \int_0^\sigma \tau \operatorname{th} \pi\tau \varphi(\tau) \Phi(\tau) P_{-1/2+i\tau}(x) d\tau.$$

В силу формулы о свертке для преобразования Мелера — Фока будем иметь

$$(5) \qquad g_\sigma(x) = \gamma_\sigma^{-1} \int_0^\infty f_h(x) \operatorname{ch}^{-4} h \sin^4((\sigma/4) \operatorname{ch} h) \operatorname{sh} h\, dh.$$

Справедливо следующее неравенство:

$$(6) \qquad \frac{1}{\gamma_\sigma} \int_0^\infty h^\alpha \operatorname{ch}^{-4} h \sin^4((\sigma/4) \operatorname{ch} h) \operatorname{sh} h\, dh \leq c/\sigma^{-\alpha},$$

где $0 < \alpha < 3$, постоянная c не зависит от σ.

Лемма 1. *Справедливо неравенство* $| P_{-1/2+i\tau} [\operatorname{ch}(\theta + i\beta)] | \leq \operatorname{ch} \tau\beta$, $0 \leq \beta \leq \theta < \infty$.

Доказательство. Из формулы (3) при $s = \theta u$ получим

$$(7) \qquad P_{-1/2+i\tau}[\operatorname{ch}(\theta+i\beta)] = \frac{\theta+i\beta}{\sqrt{2}\,\pi} \int_0^1 \frac{(e^{i\tau\theta u - \beta\tau u} + e^{-i\tau\theta u + \beta\tau u})\, du}{\left[\operatorname{sh} \frac{(\theta+i\beta)(1+u)}{2} \operatorname{sh} \frac{(\theta+i\beta)(1-u)}{2}\right]^{1/2}}.$$

Замечая, что $|\operatorname{sh} z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \cos^2 y}$, $z = x + iy$ и вычисляя модуль функции (7), будем иметь

$$|P_{-1/2+i\tau}[\operatorname{ch}(\theta+i\beta)]|$$

$$\leqq \pi^{-1}\sqrt{\theta^2+\beta^2}\int_0^1 \frac{\operatorname{ch}(\tau\beta u)\,du}{\left\{\left[\operatorname{ch}^2\dfrac{\theta(1+u)}{2}-\cos^2\dfrac{\beta(1+u)}{2}\right]\left[\operatorname{ch}^2\dfrac{\theta(1-u)}{2}-\cos^2\dfrac{\beta(1-u)}{2}\right]\right\}^{1/4}}.$$

Из разложения функций $\operatorname{ch}^2 x$ и $\cos^2 x$ в ряд Маклорена следует неравенство, если $\beta \leqq \theta$,

$$\operatorname{ch}^2\theta(1\pm u)/2 - \cos^2\beta(1\pm u)/2 \geqq (1\pm u)^2(\theta^2+\beta^2)/4.$$

Из последнего неравенства и предыдущего получим то, что требовалось доказать.

Л е м м а 2. *Пусть функция $\Phi(\tau)$ принадлежит L_p с весом $\tau \operatorname{th}\pi\tau$. Тогда существует такая постоянная M, что функция*

$$g_\sigma(\operatorname{ch}\theta) = \int_0^\sigma \tau \operatorname{th}\pi\tau\, \Phi(\tau) P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\theta)\,d\tau \tag{8}$$

удовлетворяет неравенству $|g_\sigma[\operatorname{ch}(\theta+i\beta)]| \leqq Me^{\sigma\beta}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя неравенство Гёльдера к соотношению (8) и используя лемму 1, получим то, что требовалось доказать.

Л е м м а 3. *Имеет место неравенство $\| g_\sigma^{(s)}(x)\|_{p,s} \leqq c\sigma^s \| g_\sigma(x)\|_p$, где постоянная c не зависит от σ.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для простоты вычислений докажем неравенство при $s=1$. Функция $g_\sigma(\operatorname{ch}\theta)$ в силу (5) и леммы 2 является целой ограниченной функцией типа σ относительно θ. Из соотношения $\sqrt{x^2-1}\,(d/dx)g_\sigma(x) = (d/d\theta)g_\sigma(\operatorname{ch}\theta)$, на основании неравенства Б е р н ш т е й н а [2] $|(d/d\theta)\,g_\sigma(\operatorname{ch}\theta)| \leqq \sigma \max\limits_x |g_\sigma(x)|$ и его аналога в L_p получим, что $\|g'_\sigma(x)\|_{p,1} \leqq \sigma \| g_\sigma(x)\|_p$.

Л е м м а 4. *Справедливо неравенство $\| g_\sigma^{(s)}(x)\|_p \leqq c\sigma^{2s} \| g_\sigma(x)\|_p$, где постоянная c не зависит от σ.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $s=1$. Функция $g_\sigma(\operatorname{ch}\sqrt{\theta})$ является целой функцией полустепени σ [2]. Заметим, что

$$(d/dx)\,g_\sigma(x) = (2\sqrt{\theta}/\operatorname{sh}\sqrt{\theta})(d/d\theta)\,g_\sigma(\operatorname{ch}\sqrt{\theta}).$$

В силу неравенства С. Н. Бернштейна

$$|(d/d\theta)\,g_\sigma(\operatorname{ch}\sqrt{\theta})| \leqq (\sigma^2/2)\,\max_x |g_\sigma(x)|$$

и его аналога в L_p, учитывая, что $u/\operatorname{sh} u \leqq 1$, будем иметь $\| g'_\sigma(x)\|_p \leqq \sigma^2 \| g_\sigma(x)\|_p$.

Л е м м а 5. *Справедливо соотношение*

$$f_h(x) - f(x) = \int_0^h \frac{dt}{\operatorname{sh} t}\int_0^t L_u f(x)\operatorname{sh} h\,du. \tag{9}$$

Доказательство. Из формулы сложения

$$P_{-1/2+i\tau}(y)=P_{-1/2+i\tau}(x)P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}u)$$

$$+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\Gamma(1/2+i\tau-m)}{\Gamma(1/2+i\tau+m)}P^m_{-1/2+i\tau}(x)P^m_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}u)\cos m\varphi,$$

где $y=x\operatorname{ch}u+\sqrt{x^2-1}\operatorname{sh}u\cos\varphi$, следует соотношение

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi P_{-1/2+i\tau}(y)\,d\varphi=P_{-1/2+i\tau}(x)P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}u). \tag{10}$$

Замечая, что $LP_{-1/2+i\tau}(x)=(\tau^2+1/4)P_{-1/2+i\tau}(x)$, из соотношения (10) будем иметь

$$L_uP_{-1/2+i\tau}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi LP_{-1/2+i\tau}(y)d\varphi=P_{-1/2+i\tau}(x)LP_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}u).$$

Интегрируя по u и t, получим

$$\int_0^h\frac{dt}{\operatorname{sh}t}\int_0^t L_uP_{-1/2+i\tau}(x)\operatorname{sh}u\,du=P_{-1/2+i\tau}(x)[P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}h)-1]. \tag{11}$$

Из формулы (10) следует, что если $\Phi(\tau)$ — преобразование Мелера—Фока функции $f(x)$, то $P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}h)\,\Phi(\tau)$ является преобразованием Мелера — Фока функции $f_h(x)$. Учитывая формулу (11), получим то, что требовалось доказать.

Лемма 6. *Имеет место неравенство* $\tilde{\omega}(f,\lambda\delta)_p\leqq(\lambda+1)^2\tilde{\omega}(f,\delta)_p$, $0<\lambda$ — *действительное число*.

Доказательство. Если m — натуральное число, то из формулы (9) следует неравенство $\tilde{\omega}(f,m\delta)_p\leqq m^2\tilde{\omega}(f,\delta)_p$. Если $0<\lambda$ — действительное число, то можно указать такое натуральное число m, что $m\leqq\lambda<m+1$. Учитывая, что $\tilde{\omega}(f,\delta)_p$ не убывает относительно δ, получим то, что требовалось.

Аналогичное неравенство имеет место для $\tilde{\omega}_2(f,\lambda\delta)_p$.

Лемма 7. *Справедливо неравенство*

$$\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\pi|f(x\operatorname{ch}h+\sqrt{x^2-1}\operatorname{sh}h\cos\varphi)(x\operatorname{sh}h+\sqrt{x^2-1}\operatorname{ch}h\cos\varphi)|^p\,d\varphi\,dx\right)^{1/p}$$

$$\leqq\|f(u)\sqrt{u^2-1}\|_p.$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$J=\Big(\iint_\Gamma|(-x_1y_1-x_2y_2+x_3y_3)[(-x_1y_1-x_2y_2+x_3y_3)^2-1]^{1/2}|^p d\Gamma\Big)^{1/p}, \tag{12}$$

$d\Gamma$ — инвариантный элемент поверхности Γ: $-y_1^2-y_2^2+y_3^2=1$, $y_3\geqq0$; $-x_1^2-x_2^2+x_3^2=1$.

В плоскости $-x_1y_1-x_2y_2+x_3y_3=0$ введем систему координат v и w, а за ось u возьмем направление $u=(-x_1y_1-x_2y_2+x_3y_3)(-x_1^2-x_2^2$

$+x_2^2)^{-1/2}$. Параметрическое уравнение поверхности в этой системе координат имеет вид $u=u, v=\sqrt{u^2-1}$, $w=\sqrt{u^2-1}\sin\omega$, $1\leq u<\infty$, $0\leq\omega<2\pi$. Поэтому

$$J=(2\pi\int_1^\infty |f(u)\sqrt{u^2-1}|^p\,du)^{1/p}. \tag{13}$$

Введем систему координат

$$x_1=\operatorname{sh}\psi\cos\theta,\quad x_2=\operatorname{sh}\psi\sin\theta,\quad x_3=\operatorname{ch}\psi,\quad 0\leq\psi<\infty,\quad 0\leq\theta<2\pi,$$
$$y_1=\operatorname{sh}h\cos\theta',\quad y_2=\operatorname{sh}h\sin\theta',\quad y_3=\operatorname{ch}h,\quad 0\leq h<\infty,\quad 0\leq\theta'<2\pi.$$

Тогда будем иметь $-x_1y_1-x_2y_2+x_3y_3=x\operatorname{ch}h+\sqrt{x^2-1}\operatorname{sh}h\cos\varphi$, $x=\operatorname{ch}\psi$, $\varphi=\theta-\theta'$. Из последного соотношения, (12) и (13), учитывая неравенство $|x\operatorname{sh}h+\sqrt{x^2-1}\operatorname{ch}h\cos\varphi|\leq[(x\operatorname{ch}h+\sqrt{x^2-1}\operatorname{sh}h\cos\varphi)^2-1]^{1/2}$, получим то, что требовалось доказать.

С помощью аналогичных вычислений получим

Следствие 1.

$$(\pi^{-1}\int_1^\infty\int_0^\pi |f(x\operatorname{ch}h+\sqrt{x^2-1}\operatorname{sh}h\cos\varphi)|^p\,d\varphi dx)^{1/p}=\|f(u)\|_p,$$

$$(\pi^{-1}\int_1^\infty\int_0^\pi |f(x\operatorname{ch}h+\sqrt{x^2-1}\operatorname{sh}h\cos\varphi)(x\operatorname{ch}h$$
$$+\sqrt{x^2-1}\operatorname{sh}h\cos\varphi)|^p\,d\varphi\,dx)^{1/p}=\|f(u)u\|_p,$$

$$(\pi^{-1}\int_1^\infty\int_0^\pi |f(x\operatorname{ch}h+\sqrt{x^2-1}\operatorname{sh}h\cos\varphi)(x\operatorname{sh}h$$
$$+\sqrt{x^2-1}\operatorname{ch}h\cos\varphi)^2|^p\,d\varphi dx)^{1/p}\leq\|f(u)(u^2-1)\|_p.$$

Лемма 8. *Справедливо неравенство* $\|g_{\sigma,h}(x)-g_\sigma(x)\|_p\leq c\sigma^2h^2\|g_\sigma(x)\|_p$, *где постоянная* c *не зависит от* σ *и* h,

$$g_{\sigma,h}(x)=\pi^{-1}\int_0^\pi g_\sigma(x\operatorname{ch}h+\sqrt{x^2-1}\operatorname{sh}h\cos\varphi)\,d\varphi.$$

Доказательство. Из леммы 5 имеем

$$g_{\sigma,h}(x)-g_\sigma(x)=\int_0^h\frac{dt}{\operatorname{sh}t}\int_0^t L_u\,g_\sigma(x)\operatorname{sh}u\,du.$$

Применяя неравенство Минковского и следствие 1, получим

$$\|g_{\sigma,h}(x)-g_\sigma(x)\|_p\leq h^2\|(x^2-1)g''_\sigma(x)\|_p+2h^2\|xg'_\sigma(x)\|_p.$$

Первое слагаемое в правой части оценим с помощью леммы 3. Для оценки второго слагаемого воспользуемся леммой 4 в промежутке $1\leq x\leq A_1$, а в промежутке $A_1\leq x<\infty$ — леммой 3. Объединяя после этого оценки, получим то, что требовалось.

Введем обозначение

$$A_\sigma(f^{(s)})_{p,s}=\inf_{g_\sigma}\|f^{(s)}(x)-g_\sigma((x)\|_{p,s},\ A_\sigma(f)_{p,0}=A_\sigma(f)_p.$$

Лемма 9. *Имеет место неравенство* $A_\sigma(f)_p\leqq c/\sigma\,A_{\sigma-1}(f')_{p,1}$, *где постоянная* c *не зависит от* σ.

Доказательство. Из соотношения (5) имеем

$$A_\sigma(f)_p\leqq\|f(x)-g_\sigma(x)\|_p\leqq\frac{1}{\gamma_\sigma}\|\int_0^\infty[f_h(x)-f(x)]\frac{\sin^4((\sigma/4)\operatorname{ch}h)}{\operatorname{ch}^4 h}\operatorname{sh}h\,dh\|_p.$$

Заметим, что $f_h(x)-f(x)=\pi^{-1}\int_0^\pi\int_0^h f'(x\operatorname{ch}u+\sqrt{x^2-1}\operatorname{sh}u\cos\varphi)(x\operatorname{sh}u+\sqrt{x^2-1}\operatorname{ch}u\cos\varphi)\,du\,d\varphi$.

Поэтому применяя неравенство Минковского и следствие 1, получим $A_\sigma(f)_p\leqq(c/\sigma)\|f'(x)\|_{p,1}$. Далее $\|F'(x)\|_{p,1}=A_{\sigma-1}(f')_{p,1}$, $F(x)=f(x)-\int_1^x g_{\sigma-1}(t)dt$. В силу доказанного неравенства имеем $A_\sigma(F)\leqq(c/\sigma)A_{\sigma-1}(f')_{p,1}$. Отсюда и неравенства $A_\sigma(f)_p\leqq A_\sigma(F)_p$ получим лемму 9.

Теорема 1. *Если функция* $f(x)\in L_p$ *имеет* s*-ю производную с конечной нормой* $\|f^{(s)}(x)\|_{p,s}$, *то имеет место неравенство* $A_\sigma(f)_p\leqq(c/\tilde{\sigma}^s)\,\omega(f^{(s)},1/\sigma)_p$, *где постоянная* c *не зависит от* σ.

Доказательство. Из соотношения (5) имеем

$$|f^{(s)}(x)-g_\sigma^{(s)}(x)|\leqq\gamma_\sigma^{-1}\int_0^\infty|f_h^{(s)}(x)-f^{(s)}(x)|\operatorname{ch}^{-4}h\sin^4((\sigma/4)\operatorname{ch}h)\operatorname{sh}h\,dh.$$

Отсюда и неравенства Минковского получим

$$A_{\sigma-s}(f^{(s)})_{p,s}\leqq\gamma_\sigma^{-1}\int_0^\infty\tilde{\omega}(f^{(s)},h)_p\operatorname{ch}^{-4}h\sin^4((\sigma/4)\operatorname{ch}h)\operatorname{sh}h\,dh.$$

На основании леммы 6 следует

$$A_{\sigma-s}(f^{(s)})_{p,s}\leqq\gamma_\sigma^{-1}\omega(f^{(s)},\frac{1}{\sigma})_p\int_0^\infty(\sigma h+1)^2\operatorname{ch}^{-4}h\sin^4((\sigma/4)\operatorname{ch}h)\operatorname{sh}h\,dh.$$

Из последнего и неравенства (6) будем иметь

$$A_{\sigma-s}(f^{(s)})\leqq c\tilde{\omega}(f^{(s)},\frac{1}{\sigma})_p.$$

Применяя к последному неравенству s-раз лемму 9, получим то, что требовалось доказать.

Теорема 2. *Пусть для каждого* $\sigma\geqq\sigma_0>0$ *существует такая функция* $g_\sigma(x)$, *что выполняется неравенство* $A_\sigma(f)_p\leqq c/\sigma^{s+\alpha}$, $0<\alpha<2$, *постоянная* c *не зависит от* σ.

Тогда $f(x)=g_{\sigma_0}(x)+\psi(x)$, *где* $\psi(x)\in L_p$ *имеет* s*-ю производную с конечной нормой* $\|\psi^{(s)}\|_{p,s}$ *и выполняется неравенство* $\tilde{\omega}(\psi^{(s)},h)_p\leqq Mh^\alpha$, M *не зависит от* $h>0$. *В случае* $0<\alpha\leqq2$ *выполняется неравенство* $\tilde{\omega}_2(\psi^{(s)},h)_p\leqq Mh^\alpha$.

Доказательство. Положим $\sigma_k=2^k\sigma_0$, $k=0,1,2,\ldots$, $G_k(x)=g_{\sigma_k}(x)-g_{\sigma_{k-1}}(x)$. Из условия теоремы имеем $\|G_k(x)\|_p\leqq\|f(x)-g_{\sigma_k}(x)\|_p+\|f(x)$

$-g_{\sigma_{k-1}}(x)\|_p \leqq c/\sigma_k^{s+\alpha}$. Отсюда и леммы 3 получим

(14) $$\| G_k^{(s)}(x) \|_{p,\, s} \leqq c/\sigma_k^{\alpha}.$$

Следовательно, ряд $\psi^{(s)}(x) = \Sigma_{k=1}^{\infty} G_k^{(s)}(x)$ сходится в L_p с весом $(x^2-1)^{s/2}$. Далее имеем

$$\| \psi_h^{(s)}(x) - \psi^{(s)}(x) \|_{p,s} \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \| G_{k,\, h}^{(s)}(x) - G_k^{(s)}(x) \|_{p,\, s}.$$

Исходя из $h>0$, подберем натуральное число N так, чтобы $2^{N-1} \leqq 1/h < 2^N$. Тогда получим

$$\| \psi_h^{(s)}(x) - \psi^{(s)}(x) \|_{p,\, s} \leqq \sum_{k=1}^{N-1} \| G_{k,\, h}^{(s)}(x) - G_k^{(s)}(x) \|_{p,\, s} + \sum_{k=N}^{\infty} \| G_{k,\, h}^{(s)}(x) - G_k^{(s)}(x) \|_{p,s} = J_1 + J_2.$$

На основании леммы 8 и (14) следует

$$\| G_{k,\, h}^{(s)}(x) - G_k^{(s)}(x) \| \leqq c\, 2^{k(2-\alpha)}\, h^2.$$

Поэтому

(15) $$J_1 \leqq ch^2 \sum_{k=1}^{N-1} 2^{k(2-\alpha)} \leqq ch^{\alpha}.$$

Учитывая следствие 1, получим неравенство

(16) $$J_2 \leqq 2 \sum_{k=N}^{\infty} \| G_k^{(s)}(x) \|_{p,\, s} \leqq 2c/\sigma_0^{\alpha} \sum_{k=N}^{\infty} 2^{-k\alpha} \leqq ch^{\alpha}.$$

Из оценок (15) и (16) имеем $\tilde{\omega}(\psi^{(s)}, h)_p \leqq Mh^{\alpha}$.

В случае $0 < \alpha \leqq 2$ доказательство аналогично, если воспользоваться модулем типа гладкости $\tilde{\omega}_2(\psi^{(s)}, h)_p$.

Теперь рассмотрим свойства функции многих переменных. Определим в n-мерном евклидовом пространстве билинейную форму $[x, y] = -x_1 y_1 - \cdots - x_{n-1} y_{n-1} + x_n y_n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Пусть на поверхности $[x, x] = 1$ задана функция $f(x)$. Введем обозначение

$$\| f \|_p = \Big(\int_{[x,\, x]=1} | f(x) |^p \, dx \Big)^{1/p}, \qquad f_h(x) = \frac{1}{\Omega_n(h)} \int_{[x,\, y]=\operatorname{ch} h} f(y)\, dy,$$

где dx — элемент поверхности $[x, x] = 1$, $\Omega_n(h)$ — нормирующий множитель $n = 2\lambda + 3$.

Усреднение $f_{hh}(x)$ является усреднением от $f_h(x)$.

Через $\square^k f(x)$ обозначим k-ю степень волнового оператора $\square = \partial^2/\partial x_1^2 + \cdots + \partial^2/\partial x_{n-1}^2 - \partial^2/\partial x_n^2$ и соответственно $\bar{\Delta}_h^2 \square^k f(x) = \square^k f_{hh}(x) - 2\square^k f_h(x) + \square^k f(x)$, $\tilde{\omega}_2(\square^k f, \delta)_p = \sup \{ \| \bar{\Delta}_n^2 \square^k f \|_p : 0 < h \leqq \delta \}$.

Функция $f(x)$ из L_p принадлежит к классу $\tilde{B}_{p,\, \theta}^{r}$, если существует $\bar{r}$-ая степень волнового оператора от функции $f(x)$ и конечна норма

$$\| f \|_{\tilde{B}_{p,\, \theta}^{r}} = \| f \|_p + \Big(\int_0^1 h^{-1-\theta\alpha}\, \tilde{\omega}_2^{\theta}(\square^{\bar{r}} f, h)\, dh \Big)^{1/\theta},$$

где $r=2\bar{r}+\alpha$, $0<\bar{r}$ — целое, $0<\alpha\leq 2$, $1\leq p\leq\infty$, $1\leq\theta\leq\infty$.

Функция $f(x', x'')$ принадлежит к классу $\tilde{B}^{r_1, r_2}_{p, \theta}$, если по x' принадлежит к классу $\tilde{B}^{r_1}_{p,\theta}$, а по x'' принадлежит к классу $\tilde{B}^{r_2}_{p,\theta}$, где $x'=(x_1, \dots x_m)$, $[x', x']=1$, $x''=(x_{m+1}, \dots, x_n)$, $[x'', x'']=1$. Норму функции $f(x', x'')$ определим следующим образом: $\|f\|_{\tilde{B}^{r_1, r_2}_{p,\theta}}=\|f\|_{\tilde{B}^{r_1}_{p,\theta}}+\|f\|_{\tilde{B}^{r_2}_{p,\theta}}$.

Функция $f(x)$ из L_p принадлежит к классу $\tilde{H}^r_p$, если существует $\bar{r}$-ая степень волнового оператора и конечна норма

$$\|f\|_{\tilde{H}^r_p}=\|f\|_p+\sup_h\frac{1}{h^\alpha}\|\Delta^2_h\square^{\bar{r}} f(x)\|_p.$$

Заметим, что $\tilde{B}^r_{p,\infty}=\tilde{H}^r_p$.

Применим волновой оператор к функции $f(x', x'')$ по x'' k раз и зафиксируем x''_0. Функция $\psi^{(k)}(x')=\square^k f(x', x''_0)$, принимающая граничное значение в смысле метрики L_p, называется следом.

Справедливы следующие теоремы о следах и продолжении функций, а также теоремы вложения разных метрик [3].

Теорема 3. *Пусть функция $f(x', x'')$ принадлежит к классу $\tilde{B}^{r_1, r_2}_{p,\theta}$ и для натуральных чисел k выполняется неравенство* $\varkappa=1-\frac{2k}{r_2}-\frac{h-m-1}{pr_2}>0$. *Тогда существует след $\psi^{(k)}(x')$, такой, что $\psi^{(k)}(x')\in\tilde{B}^{\varkappa r_1}_{p,\theta}$ и выполняется неравенство*

$$\|\psi^{(k)}\|_{\tilde{B}^{\varkappa r_1}_{p,\theta}}\leq c\|f\|_{\tilde{B}^{r_1, r_2}_{p,\theta}},$$

где постоянная c не зависит от f.

Теорема 4. *Пусть $\varkappa>0$ для натуральных чисел k. Для таких k рассмотрим функцию $\psi^{(k)}(x')\in\tilde{B}^{\varkappa r_1}_{p,\theta}$. Тогда существует функция $f(x', x'')$, для которой выполняется неравенство*

$$\|f\|_{\tilde{B}^{r_1, r_2}_{p,\theta}}\leq c\sum_{(k)}\|\psi^{(k)}\|_{\tilde{B}^{\varkappa_1 r}_{p,\theta}},$$

где постоянная c не зависит от $\psi^{(k)}$.

Теорема 5. *Пусть имеют место неравенства $1\leq p\leq q\leq\infty$, $\mu=1-(1/p-1/q)\frac{n-1}{r}>0$. Тогда если $f(x)$ принадлежит к классу $\tilde{B}^r_{p,\theta}$, то она принадлежит к классу $\tilde{B}^{\mu r}_{q,\theta}$.*

Аналогичные теоремы справедливы для классов $\tilde{H}^r_p$.

Из типа теоремы 1 и теоремы 2 следует эквивалентность неравенств

$$\|f^{(s)}_{hh}(x)-2f^{(s)}_h(x)+f^{(s)}(x)\|_{p,s}\leq Mh^\alpha\Leftrightarrow\|f(x)-g_\sigma(x)\|_p\leq c/\sigma^{s+\alpha},$$

где $0<\alpha\leq 2$, постоянная M не зависит от $h>0$, а постоянная c не зависит от σ.

В случае функции многих переменных $f(x)\in\tilde{H}^r_p$ устанавливается также результат аналогичного типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Бернштейн. Собрание сочинений. Т. 1. Москва, 1952.
2. С. Н. Бернштейн. Собрание сочинений. Т. 2. Москва, 1954.
3. О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. Интегральные представления функций и теоремы вложения. Москва, 1975.
4. Г. В. Жидков. Конструктивная характеристика одного класса непериодических функций. *ДАН СССР*, **169**, 1966, № 5, 1002—1005.
5. Г. В. Жидков. О конечности интеграла Дирихле для одного класса функций. *Дифф. уравнения*, **14**, 1978, № 9, 1624—1631.
6. Г. В. Жидков. О наилучшем приближении функций на внешности интервала и полуоси. *Изв. АН Арм.* ССР **3**, 1968, № 6, 417—426.
7. Г. В. Жидков. О построении функциональных пространств с помощью волнового оператора и метода усреднения. — В: Тезисы докладов Международной конференции по теории приближения функций. Калуга, 1975.

Университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы
Москва СССР

Получено 29 июня 1981 г.