КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'81
София, 1983, с. 67—71

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
Sofia, 1983, p. 67—71

ПРИБЛИЖЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ СУММАМИ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА В СРЕДНЕМ

П. В. Задерей

Обозначим через Δ_p^r, $1\leq p\leq\infty$, множество 2π-периодических по x и y функций $f(x, y)$, которые имеют обобщенные по Соболеву производные до $2r$-го порядка, обладающие тем свойством, что функция $\Delta^r f=\Delta(\Delta^{r-1}f)=\varphi(x, y)$, где $\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$, $r=1, 2, \ldots$, суммируема, и для ее нормы выполняется неравенство $\|\varphi(x, y)\|_p=\{\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi(x,y)|^p dxdy\}^{1/p}\leq 1$, $1\leq p<\infty$.

В случае $p=\infty$ считаем, что $\varphi(x, y)$ измерима, и ее норма удовлетворяет условию $\|\varphi(x, y)\|_\infty=\sup\operatorname{vrai}|\varphi(x, y)|\leq 1$.

Через $\sigma_{m,n}^{k,l}(f; x, y)$ обозначим прямоугольные суммы Валле-Пуссена функции $f(x, y)$, т. е.

$$\sigma_{m,n}^{k,l}(f; x, y)=\frac{1}{k+1}\,\frac{1}{l+1}\sum_{i=m-k}^{m}\;\sum_{j=n-l}^{n} S_{ij}(f; x, y),$$

где $S_{ij}(f; x, y)$ — частные суммы порядка (ij) функции f.

В работе исследуется асимптотическое поведение верхней грани $\mathscr{E}(\Delta_p^r; \sigma_{nm}^{k,l})=\sup\{\|f(x, y)-\sigma_{m,n}^{k,l}(f; x, y)\|_p : f\in\Delta_p^r\}$. Именно, решаем задачу Колмогорова — Никольского [1] для полиномов $\sigma_{m,n}^{k,l}(f; x, y)(k=o(m),\ l=o(n))$ и класса Δ_p^r при $p=1$ и $p=\infty$.

Эта задача рассматривалась в работах [2, 3]. В частности, в [3] доказано, что при $p=1$ и $p=\infty$ имеет место асимптотическое равенство

$$\mathscr{E}(\Delta_p^r, \sigma_{m,n}^{k,l})=16\,\pi^{-4}(m^2+n^2)^{-r}\ln(m/(k+1))\,.\ln(n/(l+1))$$
$$+O(m^{-2r}\ln(m/(k+1))+n^{-2r}\ln(n/(l+1))).$$

Если в последнем равенстве положим $k=p=0$, то получим результат Я. С. Бугрова, который впервые ввел в рассмотрение классов Δ_p^r.

Нами доказано следующее утверждение.

Теорема. *При $p=1$ и $p=\infty$ для натуральных чисел m, n, k, l, таких, что $k=o(m)$, $l=o(n)$, имеет место равенство*

$$(1)\qquad \mathscr{E}(\Delta_p^r,\ \sigma_{m,n}^{k,l}) = 16\,\pi^{-4}\,(m^2+n^2)^{-r}\ln(m/(k+1)\,.\,\ln(n/l+1))$$
$$+\,4\pi^{-2}\,m^{-2r}\ln(m/(k+1)) + 4\pi^{-2}\,n^{-2r}\ln(n/(l+1))$$
$$+\,O((m^2+n^2)^{-r}\ln(mn/(k+1)(l+1)) + m^{-2r} + n^{-2r}).$$

Доказательство этой теоремы базируется на 5 леммах, которые сформулированы ниже.

Лемма 1. *Для произвольной функции* $f\in\Delta_\infty^n$, *натуральных чисел* $m,\ n,\ k$ и $l(0\leq k\leq m,\ 0\leq l\leq n)$ *выполняется равенство*

$$f(0,\ 0)-\sigma_{m,n}^{k,l}(f;\ 0,\ 0)$$
$$=(-1)^r\,\pi^{-1}\,(k+1)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t,0)\sum_{i=m-k}^{m}\ \sum_{q=i}^{\infty}q^{-2n}\cos qt\,dt$$
$$+(-1)^r\,\pi^{-1}\,(l+1)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(0,\ z)\sum_{j=n-l}^{n}\ \sum_{s=j}^{\infty}s^{-2r}\cos sz\,dz$$
$$-(-1)^r\,\pi^{-2}\,(k+1)^{-1}(l+1)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t,\ z)\sum_{i=m-k}^{m}\ \sum_{j=n-l}^{n}\ \sum_{q=i}^{\infty}\ \sum_{s=j}^{\infty}(q^2+s^2)^{-r}\cos qt$$
$$\times\cos sz\,dt\,dz.$$

Доказательство. Из представления функций $f\in\Delta_p^r$, полученного в [2], следует, что

$$f(0,\ 0)-\sigma_{m,n}^{k,l}(f;\ 0{,}0)=(k+1)^{-1}(l+1)^{-1}\sum_{i=m-k}^{m}\ \sum_{j=n-}^{n}(f(0,\ 0)-S_{i,j}(f;\ 0,\ 0))$$
$$=(k+1)^{-1}(l+1)^{-1}\sum_{i=m-k}^{m}\ \sum_{j=n-l}^{n}\pi^{-2}\sum_{\nu=i}^{\infty}\ \sum_{\mu=n}^{\infty}(-1)^r(\nu^2+\mu^2)^{-r}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t,z)\cos\nu t$$
$$\cos\mu z\ dt\ dz\ +\pi^{-2}\Big(\sum_{\nu=0}^{i-1}\ \sum_{\mu=j}^{\infty}+\sum_{\nu=i}^{\infty}\ \sum_{\mu=0}^{j-1}\Big)(-1)^r(\nu^2+\mu^2)^{-r}\,\lambda\nu\mu\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t,\ z)\cos\nu t$$
$$\cos\mu z\ dtdz,$$

где $\lambda_{\nu\mu}=\begin{cases}1, & \nu>0,\quad \mu>0;\\ 1/2, & \nu=0,\quad \mu>0;\quad \nu>0,\quad \mu=0.\end{cases}$

Поскольку

$$\sum_{\nu=0}^{i-1}\ \sum_{\mu=j}^{\infty}(-1)^r(\nu^2+\mu^2)^{-r}\,\lambda\nu\mu\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t,\ z)\cos\nu t\cos\mu z\,dtdz$$
$$=\sum_{\nu=0}^{i-1}\ \sum_{\mu=j}^{\infty}\pi^{-2}\lambda\nu\mu\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t,\ z)\times\cos\nu t\cos\mu z\,dtdz$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t,0)\sum_{\nu=i}^{\infty}\cos\nu t\,dt-\pi^{-2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t,\ z)\sum_{\nu=i}^{\infty}\ \sum_{\mu=j}^{\infty}\cos\nu t\cos\mu z\,dtdz$$
$$=(-1)^r\,\pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t,\ 0)\sum_{\nu=i}^{\infty}\nu^{-2r}\cos\nu t\,dt$$
$$-(-1)^r\pi^{-2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t,\ z)\sum_{\nu=i}^{\infty}\ \sum_{\mu=j}^{\infty}(\nu^2+\mu^2)^{-r}\cos\nu t\cos\mu z\,dtdz,$$

то поступая аналогичным образом с суммой $\Sigma_{\nu=i}^{\infty}\Sigma_{\mu=0}^{j-1}$, нетрудно закончить доказательство леммы [1].

Лемма 2. *Для любых натуральных чисел* m, n, k *и* l $(k=o(m)$, $l=o(n))$, *а также* $f(x, y)\in\mathring{\Delta}_{\infty}^{r}$, *справедливо равенство*

$$(2)\qquad f(0,0)-\sigma_{m,n}^{k,l}(f;0,0)=(-1)^{r+1}\pi^{-1}2m^{-2r}\int_{0}^{\pi}\varphi(t,0)V_m^k(t)\,dt$$

$$+(-1)^{r+1}\pi^{-1}2n^{-2r}\int_{0}^{\pi}\varphi(0,z)V_n^l(z)dz$$

$$+(-1)^{r+1}\pi^{-2}4(m^2+n^2)^{-r}\int_0^\pi\int_0^\pi\varphi(t,z)\,V_m^k(t)V_n^l(z)\,dtdz$$

$$+O((m^2+n^2)^{-r}\ln(m/(k+1).\,n/(l+1))+m^{-2r}+n^{-2r}),$$

где $\mathring{\Delta}_{\infty}^{r}$ — *подкласс функций* $f\in\Delta_{\infty}^{r}$, *четных по каждой переменной, а* $V_m^k(u)=\sin((2m^2-k+1)u/2)\sin((k+1)u/2)/2(k+1)\sin^2(u/2)$ *ядра Валле-Пуссена.*

Доказательство. Применяя трижды преобразование Абеля, и выполняя несложные оценки, находим

$$(\pi(k+1))^{-1}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t,0)\sum_{i=m-k}^{m}\sum_{q=i}^{\infty}q^{-2r}\cos qt\,dt\right|$$

$$\leq(\pi(k+1))^{-1}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t,0)\sum_{i=m-k}^{m}i^{-2r}\mathscr{D}_{i-1}(t)\,dt\right|+c\,m^{-2r}$$

$$\leq(-1)^{r+1}\pi^{-1}m^{-2r}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t,0)\,V_m^k(t)dt+m^{-2r}c,$$

где $\mathscr{D}_{i-1}(t)=1/2+\Sigma_{\nu=1}^{i-1}\cos\nu t$ — ядро Дирихле, а c — постоянная.

Подобным образом поступаем и с величиной

$$(-1)^r\pi^{-2}(k+1)^{-1}(l+1)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t,z)\sum_{i=m-k}^{m}\sum_{j=n-l}^{n}\sum_{q=i}^{\infty}\sum_{s=j}^{\infty}(q^2+s^2)^{-r}\cos qt$$

$$\times\cos sz\,dt\,dz=(-1)^r\pi^{-2}(k+1)^{-1}(l+1)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t,z)\sum_{i=m-k}^{m}\sum_{j=n-l}^{n}(i^2$$

$$+j^2)^{-r}\mathscr{D}_{i-1}(t)\mathscr{D}_{j-1}(z)\;dt\,dz+(-1)^r\pi^{-2}\;(k+1)^{-1}$$

$$(l+1)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t,z)\sum_{i=m-k}^{m}\sum_{j=n-l}^{n}[\mathscr{D}_{j-1}(z)\,(\Delta_\nu^1(i^2+j^2)^{-r}\,i\,\mathscr{F}_{i-1}(t)$$

$$-\sum_{\nu=i}^{\infty}\Delta_{\nu\mu}^2\,(\nu^2+j^2)^{-r}(\nu+1)\,\mathscr{F}_\nu(t)\;-\;\mathscr{F}_{j-1}(z)\,j\sum_{\nu=i}^{\infty}\Delta_{\nu\nu\mu}^3(\nu^2+j^2)^{-r}(\nu+1)\mathscr{F}_\nu(t)$$

$$+\mathscr{D}_{i-1}(t)(\Delta_\mu^1(i^2+j^2)^{-r}j\,\mathscr{F}_{j-1}(z)-\sum_{l=j}^{\infty}\Delta_{\mu,\mu}^2(i^2+\mu^2)^{-r}(\mu+1)\mathscr{F}_\mu(z))$$

$$-i\mathscr{F}_{i-1}(t)\sum_{\mu=j}^{\infty}\Delta^3_{\nu\mu\mu}(i^2+\mu^2)^{-r}(\mu+1)\mathscr{F}_{\mu}(z)-ij\mathscr{F}_{i-1}(t)\mathscr{F}_{j-1}(z)\Delta^2_{\nu\mu}(i^2+j)^{-r}$$

$$+\sum_{\nu=i}^{\infty}\sum_{\mu=j}^{\infty}\Delta^4_{\nu\nu\mu\mu}(\nu^2+\mu^2)^{-r}(\nu+1)(\mu+1)\mathscr{F}_{\nu}(t)\mathscr{F}_{\mu}(z)]\,dt\,dz=\mathscr{R}^{k,l}_{m,n}(\varphi)+\mathscr{B}^{k,l}_{m,n}(\varphi),$$

где $\mathscr{F}_k(\xi)=(\sin^2\frac{k+1}{2}\xi)/2(k+1)\sin^2\frac{\xi}{2})$ — ядро Фейера.

$$\Delta^1_{\nu}(i^2+j^2)^{-r}=(i^2+j^2)^{-r}-((i+1)^2+j^2)^{-r},\quad \Delta^2_{\nu\mu}(\nu^2+j^2)^{-r}=\Delta^1_{\nu}(\nu^2+j^2)^{-r}$$

$-\Delta^1_{\nu}(\nu^2+(j+1)^2)^{-r}$, $\Delta^3_{\nu\nu\mu}(\nu^2+\mu^2)^{-r}=\Delta^2_{\nu\mu}(\nu^2+j^2)^{-r}-\Delta^2_{\nu\mu}((\nu+1)^2+j^2)^{-r}$ и т. д

Поскольку

$$|\Delta^1_{\nu}(i^2+j^2)^{-r}|\le ci(i^2+j^2)^{-(r+1)},\quad |\Delta^2_{\nu\mu}(\nu^2+j^2)^{-r}|\le c\,(\nu^2+j^2)^{-(r+1)},$$

$$|\Delta^3_{\nu\nu\mu}(\nu^2+\mu^2)^{-r}|\le ci(\nu^2+j^2)^{-(r+2)},\quad |\Delta^4_{\nu\nu\mu\mu}(\nu^2+\mu^2)^{-r}|\le c(\nu^2+\mu^2)^{-(r+2)},$$

то нетрудно видеть, что $|\mathscr{R}^{k,l}_{m,n}(\varphi)|\le c(m^2+n^2)^{-r}\ln(mn/(k+1)(l+1))$.

С помощью преобразования Абеля для $\mathscr{B}^{k,l}_{m,n}(\varphi)$ получаем равенство

$$\mathscr{B}^{k,l}_{m,n}(\varphi)=(-1)^{r+1}\pi^{-2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t,z)(m^2+n^2)^{-r}V^k_m(t)V^l_n(z)\,dt\,dz$$

$$+O((m^2+n^2)^{-r}\ln(mn/(k+1)(l+1))).$$

Что и завершает доказательство леммы 2.

Лемма 3 [2]. *Для любых натуральных чисел m, n, k и l $(0\le k\le m,\ 0\le l\le n)$ справедливо соотношение*

$$\mathscr{E}_{m,n}(\Delta^r_1,\ \sigma^{k,l}_{m,n})=\frac{1}{2\pi^2}\max_{u,v}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\Psi^{(r)}_{m,n}(x,y)-\Psi^{(r)}_{m,n}(x+u,\ y+v)|\,dx\,dy,$$

где $\Psi^{(r)}_{m,n}(t,z)=\sum_{i=m-k}^{m}\sum_{j=n-l}^{n}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=j}^{\infty}+\sum_{\nu=i}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{j-1}\right)(-1)^r\lambda_{\nu\mu}(\nu^2+\mu^2)^{-r}\cos\nu t\cos\mu z.$

Пусть $Q\pi/j=\{(x,y):|x|\le\pi/j,\quad |y|\le\pi/j\}$, $P=Q_\pi\setminus Q_{\pi/2}$.

Лемма 4. *Для любых натуральных чисел m, n, k и l $(0\le k\le m,\ 0\le l\le n)$ имет место равенство*

$$\mathscr{E}_{m,n}(\Delta^r_\infty)=\pi^{-2}\iint_{Q_\pi}|\Psi^{(r)}_{m,n}(t,z)|\,dt,dz-2\varepsilon_1\pi^{-2}\iint_{P}|\Psi^{(r)}_{m,n}(t,z)|\,dt\,dz, \tag{3}$$

где $0\le\varepsilon_1\le1$.

Доказательство. Очевидно, что

$$\mathscr{E}(\Delta^n_\infty,\ \sigma^{k,l}_{m,n})\le\pi^{-2}\iint_{Q_\pi}|\Psi^{(r)}_{m,n}(t,z)|\,dt\,dz. \tag{4}$$

Пусть $\mathscr{Y}=\{(t,z):\pi/2\le|t|,\ |z|\le\pi\}$, а $\mathscr{D}=Q_{\pi/2}\cup\mathscr{Y}$. Положим $\varphi^*(t,z)=\operatorname{sign}\Psi^{(r)}_{m,n}(t,z)$, $(t,z)\in\mathscr{D}$, $-\varphi^*(t,z)=\varphi^*(t+\pi,z)$. Ясно, что $\iint_{Q_\pi}\varphi^*(t,z)dt\,dz=0$. Поэтому для функции $f^*\in\Delta^r_\infty$ и такой, что $\Delta^r t^*=\varphi^*$, будем иметь

$$\mathscr{E}(\Delta_\infty^r,\ \sigma_{m,n}^{k,l}) \geq \pi^{-2} \iint\limits_{Q_\pi} |\Psi_{m,n}^{(r)}(t,z)|\,dt\,dz - 2\pi^{-2}\iint\limits_{P} |\Psi_{m,n}^{(r)}(t,z)|\,dt\,dz.$$

Отсюда и из (4) следует утверждение леммы 4.

Лемма 5. *Для любых натуральных чисел* m, n, k *и* l $(0\leq k\leq m,$ $0\leq l\leq n)$ *имеет место равенство*

$$(5)\quad \mathscr{E}(\Delta_1^r,\ \sigma_{m,n}^{k,l}) = \pi^{-2}\iint\limits_{Q_\pi} |\Psi_{m,n}^{(r)}(x,y)|\,dx\,dy - 2\pi^{-2}\varepsilon_2 \iint\limits_{P} |\Psi_{m,n}^{(r)}(x,y)|\,dx\,dy,$$

где $0\leq\varepsilon_2\leq 1$.

Доказательство теоремы. Из (3) и (5) следует, что оценка сверху для величины $\mathscr{E}(\Delta_\infty^r;\ \sigma_{m,n}^{k,l})$ следует из равенства (2) и соотношения $2\pi^{-1}\int_0^\pi |V_m^k(t)|\,dt = 4\pi^{-2}\ln(m/(k+1)) + O(1)$.

Обозначим через $\varphi^0(x,y)$ 2π-периодическую, четную по обеим переменным функцию, которая в $K_1=\{(x,y): 0\leq x,\ y\leq\pi\}$ определяется следующим образом:

$$\varphi^0(x,y)=\begin{cases} \operatorname{sign} V_{m-1}^k(x)V_{n-1}^l(y), & \pi/(2m-k+1)\leq x\leq\pi,\ \pi/(2n-l+1)\leq y\leq\pi,\\ \operatorname{sign} V_{m-1}^k(x), & \pi/(2m-k+1)\leq x\leq\pi,\ 0\leq y\leq\pi/(2n-l+1),\\ \operatorname{sign} V_{n-1}^l(y), & \pi/(2n-l+1)\leq y\leq\pi,\ 0\leq x\leq\pi/(2m-k+1),\\ 0, & 0\leq x\leq\pi/(2m-k+1),\ 0\leq y\leq\pi/(2n-l+1).\end{cases}$$

Очевидно, что $\varphi^0(x,y)$ превращает соотношение (1) в равенство. Этим теорема в случае $p=\infty$ доказана.

Из (3) и (5) следует, что $\mathscr{E}(\Delta_1^r,\ \sigma_{m,n}^{k,l}) = \mathscr{E}(\Delta_\infty^r, \sigma_{m,n}^{k,l}) - 2\pi^{-2}\varepsilon\iint_P |\Psi_{m,n}^{(r)}(x,\ y)$ $dx dy$, где $0\leq\varepsilon\leq 1$. Поскольку

$$\iint\limits_{P} |\Psi_{mn}^{(r)}(x,y)|\,dx\,dy = O((m^2+n^2)^{-r}\ln\left(\frac{m}{k+1}\ \frac{n}{l+1}\right) + m^{-2r} + n^{-2r}),$$

то этим завершается доказательство теоремы и в случае $p=1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Степанец. Исследования по экстремальным задачам теории суммирования рядов Фурье. (Автореф. дисс. д-ра физ.-мат. наук. Киев. 1974).
2. Я. С. Бугров. Приближение тригонометрическими полиномами классов функций, определяющихся полигармоническими операторами. *Успехи мат. наук*, **15**, 1958, № 2, 149—156.
3. В. Н. Трофимов. Приближение функций некоторых классов, определяющихся полигармоническим оператором. усеченным средними арифметических частных сумм ряда Фурье. *Успехи мат. наук*, **15**, 1960, № 5, 191—198.
4. А. В. Ефимов. О приближении периодических функций суммами Валле-Пуссена. 1. *Изв. АН СССР, Сер. матем.*, **23**, 1959, № 5, 737—770.

Институт математики АН УССР Киев

Получено 3 июня 1981 г.

СССР