КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'81
София, 1983, с. 72—77

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
Sofia, 1983, p. 72—77

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ АЛГОРИТМОВ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ И ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧЕБЫШЕВСКИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

В. В. Иванов, А. А. Каленчук

Резюме. В статье приводятся основные характеристики вычислительных алгоритмов Даются определения оптимальных алгоритмов по точности (аналитическая сложность) и по числу операций (алгебраическая сложность). Применительно к задаче чебышевских полиномиальных и дробно-рациональных наилучших приближений описывается ряд алгоритмов ее решения и указываются оценки следующих характеристик: полной погрешности решения задачи, необходимого числа операций и памяти ЭВМ. Сравнение этих характеристик показывает, что может быть достигнуто существенное повышение эффективности алгоритмов, основанных на способе последовательных чебышевских интерполяций (п. ч. и.) Е. Я Ремеза.

Отмечается, что чебышевские наилучшие приближения близки к оптимальным приближениям в смысле алгебраической сложности и могут существенно уступать оптимальным приближениям в смысле аналитической сложности. Однако на отдельных этапах построения оптимальных по точности аппроксимаций нередко оказываются необходимыми полиномиальный или дробно-рациональный способы наилучшего приближения.

1. Вопросы оптимизации алгоритмов решения задач на ЭВМ. Для сравнения вычислительных алгоритмов (в. а.) важное значение на практике имеют такие характеристики, как полная абсолютная погрешность Δ решения задачи на ЭВМ, величина T времени решения задачи на ЭВМ по данному в. а., величина M необходимой памяти ЭВМ и показатель эффективности использования данного в. а. при решении задачи.

Полная погрешность решения задачи на ЭВМ $C(Y)$ с помощью алгоритма $A(X)$ равна $\Delta=\rho(R, \psi A(X, Y) I_\rho(Y))$, где ρ — метрика множества $\mathscr{R}$ результатов решений задач одного класса, R — элемент этого множества, соответствующий элементу $I\subset J$ множества исходных данных; I_ρ — конечномерный числовой вектор, поставленный в соответствие элементу I; Y — вектор параметров, характеризующий ЭВМ C; $A(X, Y)$ — программа алгоритма $A(X)$; X — вектор формальных параметров алгоритма; оператор ψ — некоторый интерпретатор результатов.

Для решения задачи при помощи программы $A(X, Y)$ на ЭВМ $C(Y)$ необходима память $M(I, X, Y)$ для хранения соответственно исходных данных I, программы $A(X, Y)$, рабочих массивов и искомых величин.

Величина $T=T(I, X, Y)$ времени решения задачи с помощью алгоритма $A(X)$ на ЭВМ $C(Y)$, как правило, оценивается косвенно посредством оценки числа K так называемых средних по времени t реализаций на ЭВМ операций, т. е. $T(I, X, Y)\approx K\cdot t$.

Задача оптимизации алгоритма состоит в улучшении одной из указанных характеристик с соблюдением реальных ограничений на остальные [1]. Алгоритм, для которого достаются наилучшие значения характеристик, называется по определению оптимальным. Если при этом достигается минимизация погрешности, то соответствующий алгоритм называется оптимальным по точности.

Оптимальный по точности алгоритм, использующий N значений входных данных I, решает проблему аналитической сложности. Алгебраическая сложность связана с построением алгоритма, обеспечивающего данную точность при минимальном количестве обычных, базисных операций ЭВМ [2, 3].

2. Краткое описание алгоритмов наилучшей чебышевской аппроксимации. В общей постановке задача равномерной чебышевской аппроксимации функции $f(x)$ на интервале $[a, b]$ состоит в следующем: найти такой набор $A=(a_0, \ldots, a_n)$ коэффициентов аппроксиманта H_n степени $\leq n$, который удовлетворяет условию минимакса $\max_{x\in[a,b]}|f(x)-H_n(x;A)| = \|f-H_n\|_l = L[H_n] = \min_{H_n}$, где $f(x)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция и $\min_{H_n} L[H_n]$ — наименьшее возможное значение величины меры равномерного приближения.

Будем рассматривать в качестве H_n классы полиномов $P_n(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \equiv P_n(x; A)$ и дробно-рациональных выражений вида $r_n(x)=P_l(x)/Q_m(x) = r_n(x; A; B)$, где $P_l(x)$ и $Q_m(x)$ — полиномы степеней l и m с наборами соответственно коэффициентов $A=\{a_i\}_0^l$ и $B=\{b_i\}_0^m$; $n=l+m$.

Тогда

$$\max_{x\in[a,b]}|f(x)-P_n(x;A)| \equiv \|f-P_n\|_c \equiv L[P_n] = \min_{P_n}, \tag{1}$$

$$\max_{x\in[a,b]}|f(x)-r_n(x;A;B)| \equiv \|f-r_n\|_c \equiv L[r_n] = \min_{r_n}, \tag{2}$$

где $\min_{P_n} L[P_n]=L[\Pi_n(x)]=\rho$, $\min_{r_n} L[r_n]=L[R_n(x)]=\delta$, $\Pi_n(x)$, $R_n(x)$ и ρ, δ — полиномиальный и дробно-рациональный наилучшие чебышевские аппроксиманты и, соответственно, величины их наилучших приближений.

Теоретической основой всех алгоритмов для нахождения наилучших приближений как полиномами, так и дробно-рациональными выражениями являются классические теоремы П. Л. Чебышева об их свойствах. На основании этих теорем единственные решения задач (1) и (2) совпадают соответственно с решениями „элементарных" задач вида

$$\max_{x\in X_1}|f(x)-P_n(x;A)| = \rho X_1, \tag{1'}$$

$$\max_{x\in X_2}|f(x)-r_n(x;A;B)| = \delta X_2 \tag{2'}$$

на таких $(n+2)$ — точечных множествах X_1, $X_2 \subset [a, b]$, для которых величины ρ_{X_1} и δ_{X_2} достигают свои наибольшие возможные значения, равные ρ и δ.

Все известные в настоящее время способы решения чебышевской задачи можно, в основном, разделить на способы, основанные на распространении методов Е. Я. Ремеза, и способы, использующие аппараты линейного и выпуклого программирования [4].

Для решения дробно-рациональной задачи используются также различные приемы последовательной дифференциальной линеаризации по параметрам-коэффициентам [5]. Кроме того, синтезом многих направлений в последние годы явилась теория сплайновой аппроксимации [6, 7].

Преимуществами первых из перечисленных способов являются сравнительно быстрая скорость их сходимости (в некоторых случаях квадратичная) и возможность стандартизации вычислений. К тому же практическая эффективность этих способов проверена на большом количестве численных реализаций не только полиномиального, но и дробно-рационального приближений как у нас в стране, так и за рубежом.

Способ Е. Я. Ремеза решения задач (1′) и (2′) основан на последовательных чебышевских интерполяциях (п. ч. и.), r шагов которых сводятся к нахождению последовательности, $n+2$ — точечных S — наборов $S_r=\{x_\nu^{(r)}\}_{\nu=0}^{n+1}$, сходящейся к искомому чебышевскому альтернансу для задачи (1) или экстремальному базису для задачи (2), и решению на каждом r-м шаге систем алгебраических уравнений

$$f(x_\nu^{(r)})-P_{n,r}(x_\nu^{(r)})=(-1)^\nu v\rho_r,$$

$$\omega(x_\nu^{(r)})[f(x_\nu^{(r)})-P_{l,r}(x_\nu^{(r)})/Q_{m,r}(x_\nu^{(r)})]=(-1)^\nu\delta_r,$$

соответственно линейных относительно коэффициентов $\{a_k^{(r)}\}_{k=0}^n$ полинома $P_{n,r}(x)$ и величины ρ_r и нелинейных относительно коэффициентов $\{a_k^{(r)}\}_{k=0}^l$, $\{b_k^{(r)}\}_{k=0}^m$ и величины δ_r.

Следует заметить, что в отличие от полиномиального случая сходимость ч. и. в случае задачи (2) теоретически обеспечивается не при любом начальном наборе $(n+2)$ точек, хотя практика применения известных в литературе различных численных реализаций даже упрощенных вариантов способа Е. Я. Ремеза показала крайне редкую их „несходимость“ [8, 9].

Алгоритмы решения задачи (1), (2), о которых идет речь, выгодно отличаются по ряду преимуществ от всех известных аналогичных алгоритмов, и прежде всего тем, что реализуют практически оптимальный вариант многоточечной замены при переходе к новому S набору, что обеспечивает квадратичную скорость сходимости [9].

Для решения задачи (1) разработан кроме алгоритма А, алгоритм Б в целях существенного уменьшения погрешности округлений при вычислении значений полинома в точке [9].

3. Оценка погрешности алгоритмов. Для всех указанных алгоритмов получены для функций различных классов априорные и апостериорные мажорантные детерминированные оценки всех видов погрешностей, вычисление которых включено в вычислительные схемы соответствующих программ на языках АЛГОЛ и ФОРТРАН, что позволяет автоматизировать процесс оптимизации алгоритмов. Некоторые из указанных погрешностей можно свести к следующим утверждениям:

Утверждение 1. *Для полной абсолютной погрешности алгоритмов решения задачи* (1) *справедлива следующая априорная оценка (с точностью до главных членов):*

$$\Delta\leqq 5\rho+4\varepsilon_f+(M_2+n^4M)h^2/8+\eta_\tau+2^{-\tau+8}n^2M,$$

где ε_f *— точность задания функции на сетке,* $|f(x)|\leqq M$ и $|f''(x)|\leqq M_2$ *оцениваются при необходимости с помощью данных* $\{x_i\}_0^N$ *и* $\{f(x_i)\}_1^N$;

$h=\max\{|x_i-x_{i-1}|: x_i, x_{i-1}\subset[a, b]\}$; η_τ — *заданный параметр критерия останова алгоритма;* τ — *фиксированная на ЭВМ разрядность мантисс чисел.*

Утверждение 2. *Справедлива следующая апостериорная оценка полной абсолютной погрешности решения на ЭВМ задачи* (1) *(с точностью до главных членов и с учетом обозначений утверждения* 1*):*

$$\Delta\leqq 4\varepsilon_f+(M_2+n^4M)h^2/8+5[\rho_{\varepsilon,\tau}]_\tau^{\text{А, Б}},$$

где $[\rho_{\varepsilon,\tau}]_\tau^{\text{А, Б}}$ — величины наилучшего приближения, вычисленные на ЭВМ соответственно по алгоритму А или Б.

Утверждение 3. *Для случая функции* $f(x)$ *и для ее оптимальной аппроксимации* $f(x)$ *в классе допустимых функций, заданных на сетке с точностью* ε_f, *справедлива следующая апостериорная оценка полной абсолютной погрешности решения на ЭВМ задачи* (2) *(с точностью до главных членов и с учетом принятых ранее обозначений):*

$$\Delta\leqq(l^2+m^2)(\tilde{Q}_{m,\tau}/\tilde{q}_{m,\tau})(\tilde{M}h/2+3\tau_{\tilde{f}}+5[\delta_{\varepsilon,\tau}]_\tau$$
$$+2^{-\tau}\tilde{M}+2^{-\tau+7}(l^2\tilde{P}_{l,\tau}/\tilde{q}_{m,\tau}+m^2\,\tilde{Q}_{m,\tau}/\tilde{q}_{m,\tau}\cdot\tilde{M})+\varepsilon_f+hL,$$

где $\tilde{P}_{l,\tau}$, $\tilde{Q}_{m,\tau}$ и $\tilde{q}_{m,\tau}$ — вычисленные на ЭВМ максимальные на сетке значения соответственно числителя $P_l(x)$ и знаменателя $Q_m(x)\neq 0$ и минимальное значение $Q_m(x)$ наилучшего дробно-рационального аппроксиманта в задаче (2) для функции $\tilde{f}(x)$; $\tilde{M}$ — максимальное значение $\tilde{f}(x)$ на сетке; $\tau_{\tilde{f}}$ — погрешность вычисления $\tilde{f}(x)$ на ЭВМ; L — оценка максимального по модулю значения $f'(x)$.

4. Оценка числа операций и необходимой памяти. Анализируя вычислительные схемы и разработанные программы алгоритмов, описанных в п. 2, приходим к следующим утверждениям.

Утверждение 4. *С учетом главных членов число* K *арифметических операций для алгоритмов А и Б решения задачи* (1) *на сетке* N *узлов удовлетворяет соотношению* $K=(Nn+2n^2)r$, где r — число итераций алгоритма.

При этом необходимая память (число ячеек ЭВМ) для запоминания исходных данных, промежуточных и окончательных результатов и для хранения программы (M_1) $M=3N+n^2+4n+M_1$.

Следствие. Пусть дан класс функций $f(x)$, определенных на $[-1, 1]$, с s-ой производной $f^{(s)}(\theta)$, $x=\cos\theta$, по модулю не превосходящей 1, и пусть требуется определить сетку и многочлен, приближающий любую функцию $f(x)$ с абсолютной погрешностью метода $\leqq\varepsilon$. Тогда число необходимых операций с точностью до главных членов и $N>n^2$ не превосходит $K=r(4\pi/\varepsilon)^{3/s}$.

Заметим, что число итераций r обычно $\leqq 3$ [4, 9].

Утверждение 5. *Число операций алгоритма решения задачи* (2) *по порядку равно* $(Nn^2+n^3)r$, *где* r — *максимальное количество итераций среди всех шагов алгоритма.*

Следует заметить, что в общем случае многочлен наилучшего чебышевского приближения может не совпадать с многочленом, который дает ту же точность и требует наименьшее число операций над коэффициентами многочлена и его аргументом [10]. Если не ограничиваться многочленами в качестве аппроксимантов и приближать, например, элементарную функцию, то можно указать способы, требующие порядка $\sqrt{n}$ [11] и $\ln^2 n$ [12] простейших операций для получения верных цифр результата. Однако при небольших n эти способы не имеют практического преимущества, т. к. константы при указанных порядках существенно больше соответствующей константы наилучшего чебышевского приближения.

Практическая ценность чебышевских приближений, по-видимому, может быть теоретически обоснована, если будет доказано следующее предположение: для небольших n чебышевские наилучшие полиномиальные приближения требуют среди всех многочленов, приближающих функции ряда важных классов с одинаковой точностью, минимального количества операций умножения, сложения и вычитания (или практически не отличимого от минимального). Если добавить еще операцию деления, то аналогичное предположение можно сформулировать относительно наилучших чебышевских дробно-рациональных приближений.

Следует все же подчеркнуть, что в смысле аналитической сложности (см. п. 1) равномерная наилучшая аппроксимация существенно проигрывает перед оптимальной [13]. Так, при оптимальной кусочно-полиномиальной аппроксимации в классе функции с s производными может быть достигнута точность порядка $1/N^s$, что при $N \gg n$ будет существенно выше точности порядка $1/n^s$. Следует еще заметить, что тот же порядок $1/N^s$ может быть достигнут при оптимальной аппроксимации за счет адаптивного расположения N узлов [14, 15] в значительно более широком классе непрерывных функций, производные которых по s-го порядка могут иметь неограниченные разрывы степенного порядка в конечном числе точек. Однако, на каждом из подотрезков оказывается необходимым снова полиномиальный или дробно-рациональный способ приближения, который будет, обычно, тем эффективнее, чем точнее.

5. Сравнение с некоторыми другими алгоритмами и способами аппроксимации. Известно, что задача равномерно наилучшего приближения (включая многомерный случай) легко приводится к линейному программированию с двухсторонними ограничениями [16] разномерности Nn. Следуя [16], можно утверждать, что количество итераций при таких размерах задач будет порядка N, число операций на одну итерацию — порядка Nn. Таким образом, в случае применения обычной схемы симплекс-метода общее число операций будет порядка N_n^2, что при $N \gg n$ существенно больше числа операций схемы типа Ремеза. Теоретическим подтверждением большей эффективности последних схем является их квадратичная скорость сходимости [4, 9].

В случае равномерного наилучшего дробно-рационального приближения можно применить метод последовательного сведения к задачам линейного программирования [17], что примерно по тем же причинам будет менее эффективно, чем по схеме, указанной в п. 2. Использование в ремезовской схеме представления рациональной дроби в виде цепной в силу повышенной устойчивости вычислений цепной дроби может дать дополнительные преимущества.

Таким образом, предложенные алгоритмы и сам способ чебышевской наилучшей аппроксимации являются весьма эффективными при сравнительно небольшой степени n (порядка 10).

ЛИТЕРАТУРА

1. Методы алгоритмизации непрерывных производственных процессов. Москва, 1975.
2. I. Munro, A. Borodin. Computational Complexity of Algebraic and Numerical Problems. New York, 1975.
3. J. Mikloško. Synteza a analyza efektivnych numerických algoritmov. Bratislava, 1979.
4. Е. Я. Ремез. Основы численных методов чебышевского приближения. Киев, 1969.
5. Е. Я. Ремез, В. Т. Гаврилюк. Вычислительная разработка нескольких подходов к приближенному построению решений чебышевских задач с нелинейно входящими параметрами. *Укр. мат. ж.*, **12**, 1960, № 3, 324—338.
6. С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин. Сплайны в вычислительной математике. Москва, 1976.
7. Н. П. Корнейчук. Экстремальные задачи теории приближения. Москва, 1976.
8. A. Ralston. Rational Chebyshev Approximation. Mathematical Methods for digital computers. V. 2. New York, 1967.
9. А. А. Каленчук-Порханова. Алгоритмы и анализ погрешностей наилучшей чебышевской аппроксимации функции одной переменной. — В: Теория приближения функций. Тр. Межд. конф. теории приближ. функций, Калуга, 24—28 июля 1975. Москва, 1977, 213—218.
10. И. Бабушка, С. Л. Соболев. Оптимизация численных методов. *Aplikace matematiky*, **10**, 1965, № 2, 96—129.
11. Н. С. Бахвалов. Численные методы. Москва, 1975.
12. R. P. Brent. Multiple-precision zero-finding methods and the complexity of elementary function evaluation. — In: Analytic Computational Complexity. New York, 1976, 151—176.
13. В. В. Иванов. Об оптимальных по точности алгоритмах приближения функций некоторых классов на ЭВМ. — В: Теория приближения функций. Тр. Межд. конф. теории приближ. функций, Калуга, 24—28 июля 1975. Москва, 1977, 195—200.
14. J. R. Rice. Remarks on Piecewise Polynomial Approximation. — В: Теория приближения функций. Тр. межд. конф. теории приближ. функций, Калуга, 24—28 июля 1975. Москва, 1977, 305—311.
15. Ю. А. Брудный. О некоторых нелинейных методах аппроксимации. — В: Теория приближения функций. Тр. Межд. конф. теории приближ. функций, Калуга, 24—28 июля 1975. Москва, 1977, 41—46.
16. Г. Зойтендейк. Методы возможных направлений. Москва, 1963.
17. Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. Линейное программирование. Теория, методы и приближения. Москва, 1969.

Институт кибернетики АН УССР
Киев СССР

Получено 4 июня 1981 г.