КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'81
София, 1983, с. 78—81

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
Sofia, 1983, p. 78—81

О ПРИБЛИЖЕНИИ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ НА СФЕРЕ S^n МЕТОДОМ ФУРЬЕ*

А. И. Камзолов

Пусть $S^n=\{\xi\in R^{n+1}:\Sigma_{j=1}^{n-1}|\xi_j|^2=1\}$, $n\geqq 2$ — единичная сфера в R^{n+1}, $d\xi$ — инвариантная относительно группы вращений $SO(n+1)$, нормированная единицей мера Хаара на S^n. Пространство $L^2(S^n)=\{f(\xi):\int_{S^n}|f|^2d\xi<\infty\}$ разлагается в прямую ортогональную сумму конечномерных, инвариантных и неприводимых относительно группы $SO(n+1)$ подпространств $\mathscr{H}_k$: $L^2(S^n)=\oplus\,\Sigma_{k=1}^{\infty}\mathscr{H}_k$.

Каждое подпространство $\mathscr{H}_k$ состоит из ограничений на сферу S^n однородных гармонических многочленов степени k от переменных $\xi_1,\ldots,\xi_{n+1}$ и является собственным подпространством оператора Δ_0 Лапласа — Бельтрами на сфере S^n, отвечающим собственному значению $\lambda_k=-k(k+n-1)$: $\mathscr{H}_k=\{f(\xi)\in C^\infty(S^n):\Delta_0 f=\lambda_k f\}$. Элементы подпространства $\mathscr{H}_k$ называются сферическими гармониками степени k. Каждое подпространство $\mathscr{H}_k$ содержит единственную зональную сферическую гармонику $\varphi_k(\xi)$, вещественнозначную, зависящую только от $\theta=d(\xi,\xi_0)$ — сферического расстояния между точкой $\xi\in S^n$ и точкой $\xi^0=(0,\ldots,0,1)$, такую, что для всякой сферической гармоники $Y\in\mathscr{H}_k$ ее значение в точке $\xi=\sigma\xi^0$, $\sigma\in SO(n+1)$ определяется с помощью интеграла $Y(\xi)=Y(\sigma\xi^0)=\int_{S^n}Y(\xi')\varphi_k(\sigma^{-1}\xi')d\xi'$.

Норма сферических зональных гармоник $\varphi_k(\xi)$ в пространстве $L^2(S^n)$ при $k\geqq 2$ равна

$$\|\varphi_k(\xi)\|_2=\sqrt{\dim\mathscr{H}_k}=\sqrt{\binom{n+k}{k}-\binom{n+k-2}{k-2}}\asymp k^{(n-1)/2}.$$

Зональные сферические гармоники выражаются через ультрасферические полиномы $P_k^{(\lambda)}(t)$ следующим образом: $\varphi_k(\xi)=\tilde{\varphi}_k(\theta)=(2k+n-1)/(n-1)P_k^{((n-1)/2}(\cos\theta)$. Для функции $f(\xi)\in L^1(S^n)$ мы имеем

$$\int_{S^n}f(\xi)d\xi=\int_0^\pi\Big(\int_H f(h^{-1}\xi)dh\Big)\rho(\theta)d\theta,$$

* Сообщение о помещении настоящей статьи в 1982 г. в журнале „Математические заметки", т. 31, редколлегия получила весьма поздно, ввиду чего ее изъятие из настоящего сборника было невозможно.

где $\theta=d(\xi, \xi^0)$, $\rho(\theta)=(\Gamma(n/2)\sqrt{\pi})^{-1}(\Gamma((n-1)/2))\sin^{n-1}\theta$ — весовая функция, dh — нормированная единицей мера Хаара на стационарной подгруппе $H\subset SO(n+1)$ точки ξ^0, эквивалентной группе $SO(n)$. Для зональной функции $g(\xi)$ $(g(\xi)=\tilde{g}(\theta))$ и функции $f(\xi)$ определяется свертка $[f*g](\xi)$ по формуле

$$[f*g](\xi)=[f*g](\sigma\xi^0)=\int_{S^n} f(\xi')g(\sigma^{-1}\xi')d\xi'.$$

Оператор ортогонального проектирования H_k: $L^2(S^n)\to\mathscr{H}_k$ задается формулой $H_k f(\xi)=[f*\varphi_k](\xi)$. Относительно приведенных выше элементов гармонического анализа на сфере S^n см. [1, 2].

Пусть $g_\alpha(\xi)=\tilde{g}_\alpha(\theta)\sim\sum_{k=1}^\infty [k(k+n-1)]^{-\alpha/2}\varphi_k(\xi)$, $\alpha>0$; $W_p^\alpha(S^n)=\{f(\xi): f(\xi)=c+[x*g_\alpha](\xi);\ \|x\|_p\leq 1,\ H^0x=\int_{S^n}x(\xi)\,d\xi=0\}$, $1\leqq p\leqq\infty$.

Функция $f(\xi)=c+[x*g_\alpha](\xi)$ называется α-ым (дробным) интегралом функции $x(\xi)$ и обозначается $I_\alpha x(\xi)$, а функция $x(\xi)$ называется α-ой производной функции $f(\xi)$ и обозначается $D^\alpha f(\xi)$. При $\alpha=2l$, $l\in N$, $D^{2l}f(\xi)=(-\Delta_0)^l f(\xi)$. Если $\alpha>n/p$, то $W_p^\alpha(S^n)\subset C(S^n)$ (см. [3]).

Класс функций $W_p^\alpha(S_n)$ инвариантен относительно сдвигов, то есть если $f(\xi)\in W_p^\alpha(S^n)$, то функция $f_\sigma(\xi)=f(\sigma^{-1}\xi)\in W_p^\alpha(S^n)$ для любого вращения $\sigma\in SO(n+1)$. Обозначим через $S_N f(\xi)$ частную сумму ряда Фурье функции $f(\xi)$ по сферическим гармоникам: $S_N f(\xi)=\sum_{k=0}^N H_k f(\xi)$. Мы ставим задачу о порядке приближения классов функций $W_p^\alpha(S^n)$ методом Фурье в метрике $C(S^n)$, то есть задачу об определении величины $G(W_p^\alpha(S^n), S_N, C(S^n))=\sup\{\|f(\xi)-S_N f(\xi)\|_{C(S^n)}: f\in W_p^\alpha(S^n)\}$.

Т е о р е м а. *Пусть* $\alpha>\max\{(n-1)/2, n/p\}$. *Тогда при* $N\to\infty$ *имеет место следующая асимптотика:*

$$G(W_p^\alpha(S^n), S_N, C(S^n))\asymp\begin{cases} N^{(n-1)/2-\alpha}, & \text{если}\quad p>2n/(n-1),\\ N^{(n-1)2-\alpha}(\ln N)^{n+1)/2n}, & \text{если}\quad p+2n/(n-1),\\ N^{(n/p)-\alpha}, & \text{если}\quad 1\leqq p<2n/(n-1).\end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Оценка величины $G(W_p^\alpha(S^n), S_N, C(S^n))$ сверху. Пусть $f(\xi)\in W_p^\alpha(S^n)$, $\alpha>\max\{(n-1)/2, n/p\}$, т. е. $f(\xi)=c+[x*g_\alpha](\xi)$, где $\|x(\xi)\|_p\leqq 1$, $H_0x=0$. Так как $f(\xi)-S_N f(\xi)=[x*g_{\alpha,N}]\xi$, где $g_{\alpha,N}(\xi)=\tilde{g}_{\alpha,N}(\theta)=\sum_{k=N+1}^\infty [k(k+n-1)]^{-\alpha/2}\varphi_k(\xi)$, то

$$\|f(\xi)-S_N f(\xi)\|_{C(S^n)}\leqq\|x\|_p\|g_{\alpha,N}\|_{p'}\leqq\|g_{\alpha,N}\|_{p'}, \tag{1}$$

где $1/p+1/p'=1$ Для функции $s_k(\xi)=\bar{s}_k(\delta)=\sum_{l=0}^k\varphi_l(\xi)$ при $k\geqq 2$ справедливы следующие оценки (см. [4]):

$$|\tilde{s}_k(\theta)|\leqq\begin{cases} ck^n, & \text{если}\quad 0\leqq\theta\leqq\pi/2,\\ ck^{(n-1)/2}\,\theta^{-(n+1)/2}, & \text{если}\quad 2/k\leqq\theta\leqq\pi/2,\\ ck^{(n-1)/2}(\pi-\theta)^{-(n-1)/2}, & \text{если}\quad \pi/2\leqq\theta\leqq\pi-2/k,\\ ck^{n-1}, & \text{если}\quad \pi-2/k\leqq\theta\leqq\pi.\end{cases}$$

Из этих оценок при $k\geqq 2$ получаем, что

$$\|s_k(\xi)\|_{p'}\leqq\begin{cases} c'k^{(n-1)/2}, & \text{если } 1\leqq\rho'<2n/(n+1), \text{ т. е. } p>2n/(n-1),\\ c'k^{(n-1)/2}(\ln k)^{(n+1)/2n}, & \text{если } p'=2n/(n+1), \text{ т. е. } p=2n/(n-1),\\ c'k^{n/p}, & \text{если } p'>^{2n/(n+1)}, \text{ т. е. } p<2n/(n-1).\end{cases} \tag{2}$$

Так как

$$g_{\alpha,N}(\xi)=\sum_{k=N+1}^{\infty}[k(k+n-1)]^{-\alpha/2}\varphi_k(\xi)$$

$$=-[[N+1)(N+n)]^{-\alpha/2}S_N(\xi)+\sum_{k=N+1}^{\infty}([k(k+n-1)]^{-\alpha/2}[(k+1)(k+n)]^{-\alpha/2})S_k(\xi),$$

$$\alpha>\max\{(n-1)/2,\ n/p\},\ |[k(k+n-1)]^{-\alpha/2}-[(k+1)(k+n)]^{-\alpha/2}|\leq ck^{-\alpha-1},$$

то, используя неравенства (2), получаем, что

$$(3)\qquad \|g_{\alpha,N}(\xi)\|_{p'}\leq\begin{cases}c''N^{(n-1)/2-\alpha}, & \text{если } p>2n/(n-1),\\ c''N^{(n-1)/2-\alpha}(\ln N)^{(n+1)/2n}, & \text{если } p=2n/(n-1),\\ c''N^{(n/p)-\alpha}, & \text{если } 1\leq p<2n/(n-1).\end{cases}$$

Из (1) и (3) получаются оценки для величины $G(W_p^\alpha(S^n), S_N, C(S^n))$ сверху

$$G(W_p^\alpha(S^n),\ S_N,\ C(S^n))\leq\begin{cases}c''N^{(n-1)/2-\alpha}, & \text{если } p>2n/(n-1),\\ c''N^{(n-1)/2-\alpha}(\ln N)^{(n+1)/2n}, & \text{если } p=2n/(n-1),\\ c''N^{(n/p)-\alpha}, & \text{если } p<2n/(n-1).\end{cases}$$

2. Оценка величины $G(W_p^\alpha(S^n),\ S_N,\ C(S^n))$ снизу. В силу инвариантности класса $W_p^\alpha(S^n)$ и оператора S_N относительно сдвигов

$$(4)\qquad G(W_p^\alpha(S^n),\ S_N,\ C(S^n))=\sup\{\|f(\xi)-S_Nf(\xi)\|_{C(S^n)}:\ f\in W_p^\alpha(S^n)\}$$

$$=\sup\{|f(\xi^0)-S_Nf(\xi^0)|:\ f\in W_p^\alpha(S^n)\}=\sup\{|\int_{S^n}x(\xi)g_{\alpha,N}(\xi)d\xi:\ \|x\|_p\leq 1, H_0x=0\}.$$

Если $p>2n/(n-1)$, то для функции $x_N(\xi)=2^{-1}(\cos(N+1)\theta-\int_0^\pi\cos(N+1)\theta\times\rho(\theta)d\theta)$ мы имеем

$$(5)\qquad \begin{aligned}&1)\ \|x_N(\xi)\|_p\leq\|x_N(\xi)\|_{C(S^n)}\leq 1,\ 2)\ H_0x_N(\xi)=0,\\ &3)\ \int_{S^n}x_N(\xi)g_{\alpha,N}(\xi)d\xi\geq C_1N^{(n-1)/2-\alpha},\end{aligned}$$

поскольку

$$x_N(\xi)=(n-1)(4(2N+n+1))^{-1}(N+(n-1)/2)^{-1}\varphi_{N+1}(\xi)+\sum_{k=0}^{N}b_k\varphi_k(\xi),$$

и

$$\int_{S^n}x_N(\xi)g_{\alpha,N}(\xi)^{N+1}d\xi\geq C_1N^{-1}N^{-(n-3)/2}N^{-\alpha}N^{n-1}=C_1N^{(n-1)/2-\alpha}.$$

Из (4) и (5) получаем, что при $p>2n/(n-1)$ $G(W_p^\alpha(S^n),\ S_N,\ C(S^n))\geq C_1N^{(n-1)/2-\alpha}$. Если $p=2n/(n-1)$, то для функции $x_N(\xi)=(y_N(\xi)-H_0y_N(\xi))/2$, где $y_N(\xi)=-\operatorname{sign}S_N(\xi)|S_N(\xi)|^{(n-1)/(n+1)}\|S_N(\xi)\|_{2n/(n+1)}^{-(n-1)/(n+1)}$, $S_N(\xi)=\Sigma_{k=0}^N\varphi_k(\xi)$, мы имеем:

$$1)\ \|x_N(\xi)\|_{2n/(n-1)}\leq\|y_N(\xi)_{2n/(n-1)}\leq 1,\ 2)\ H_0x_N(\xi)=0),\ 3)\ \int_{S^n}x_N(\xi)g_{\alpha,N}(\xi)d\xi$$
$$=2^{-1}\int_{S^n}y_N(\xi)g_{\alpha,N}(\xi)d\xi=2^{-1}\int_{S^n}y_N(\xi)(-S_N(\xi)(-\lambda_{N+1})^{-\alpha/2}-[(-\lambda_{N+1})^{-\alpha/2}$$
$$-(-\lambda_{N+2})^{-\alpha/2}](N+1)S_N^1(\xi)$$

$$(6)\qquad + \sum_{k=N+1}^{\infty} \Delta^2(-\lambda_k)\ (k+1)S_k^1(\xi)d\xi$$

$$\geqq 2^{-1}(C_0N^{-\alpha}\,\|\,S_N(\xi)\,\|_{2n/(n+1)} - C_1N^{(n-1)/2-\alpha}C_2\,.\sum_{k=N+1}^{\infty} k\,k^{(n-1)/2}k^{-\alpha-2}$$

$$\geqq C_3N^{(n-1)/2-\alpha}(\ln N)^{(n+1)/2n},$$

так как $\|\,S_N(\xi)\,\|_{2n/(n+1)} \asymp N^{(n-1)/2}(\ln N)^{(n+1)/2n}$, $\|\,S_k^1(\xi)\,\|_{2n/(n+1)} = \|\Sigma_{l=0}^k(1-l/(k+1)\varphi_k(\xi)\,\|_{2n/(n+1)} \asymp k^{(n-1)/2}$ (это следует из уточненной асимптотики для ядер Чезаро по ультрасферическим полиномам [7]. Из (4) и (6) получаем, что $G(W^\alpha_{2n/(n-1)}(S^n),\ S_N,\ C(S^n)) \geqq C_3N^{(n-1)/2-\alpha}(\ln N)^{(n+1)/2n}$.

Если $1 \leqq p < 2n/(n-1)$, то для функции $x_N(\xi) = aN^{-n(1-1/p)}(S^n_{3N}(\xi)-1)$, где $S^n_{3N}(\xi) = (A^n_{3N})^{-1}\,\Sigma_{k=0}^{3N} A^n_{3N-k}\,\varphi_k(\xi)$ — ядро Чезаро $3N$-го порядка индекса n, мы имеем:

1) $x_N(\xi)\,\|_p \leqq ac_4 \leqq 1$ (за счет выбора константы a, не зависящей от N), так как для $s^n_{3n}(\xi) = s^n_{3N}(\theta)$ имеют место оценки (см. [4]):

$$|\,\tilde{s}^n_{3N}(\theta)\,| \leqq \begin{cases} cN^n, & \text{если}\ 0 \leqq \theta \leqq \pi/2, \\ cN^{-1}\theta^{-n-1}, & \text{если}\ 2/3N \leqq \theta \leqq \pi/2, \\ cN^{-1}, & \text{если}\ \pi/2 \leqq \theta \leqq \pi. \end{cases}$$

2) $H_0x_N = 0$.

3) $\int_{S^n} x_N(\xi)g_{\alpha,N}(\xi)d\xi = aN^{-n(1-1/p)}(A^n_{3N})^{-1}$

$$(7)\qquad \sum_{k=N+1}^{3N} A^n_{3N+1}[k(k+n-1)]^{-\alpha/2}\,\|\,\varphi_k(\xi)\,\|_2^2$$

$$> c_5N^{(n/p)-n-1-\alpha}\sum_{k=N+1}^{2N}(3N-k)^n > C_6N^{n/p-\alpha}.$$

Из (4) и (7) следует, что при $1 \leqq p < 2n/(n-1)$

$$G(W^\alpha_p(S^n),\quad S_N,\ C(S^n)) \geqq c_6N^{(n/p)-\alpha}.$$

З а м е ч а н и е. Случай $p=2$, $\alpha=2k$, $k \in N$, $n=2$ рассмотрен в [5]. Оценка сверху для $\|\,f-S_Nf\,\|_{C(S^n)}$ через обобщенный модуль непрерывности функции $\Delta_0^k f \in C(S^n)$, $k \in N$, получена в [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. И. С т е й н, Г. В е й с. Введение и гармонический анализ на евклидовых пространствах. Москва, 1974.
2. Н. Я. В и л е н к и н. Специальные функции и теория представлений групп. Москва, 1965.
3. R. A s k e y, S. W a i n g e r. On the behavior of special classes of ultraspherical expansions. *J. Analyse Math.*, **15**, 1965, 193—244.
4. A. B o n a m i, J.-L. C l e r c. Sommes de Cesàro et multiplicateurs des developpments en harmoniques spheriques. *Trans. Amer. Math. Soc.* **183**, 1973, 223-263.
5. К. В. Х о л ш е в н и к о в. Точные оценки остатка ряда Лапласа гладкой функции. *Вестник ЛГУ, Сер. матем.*, 1975, № 3, 39—43.
6. А. С. Д ж а ф а р о в. О сферических аналогах классических теорем Дж. Джексона и С. Н. Бернштейна. *Доклады СССР*, **203**, 1972, № 2, 278—281.
7. E. K o g b e t l i a n t z. *J. Math. Pures Appl.*, **3**, 1924, p. 133.

МГУ, Механо-математический факультет
117234 Москва СССР

Получено 4 июня 1981 г.