КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'81
София, 1983, с. 82—86

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
Sofia, 1983, p. 82—86

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОБЛЕМА МНОЖИТЕЛЕЙ

Г. Е. Караджов

Резюме. Тригонометрическая проблема множителей состоит в аналитическом описании класса M_q периодических функций со следующим свойством. Если f_k — коэффициенты Фурье функции f, то $\psi \in M_q$ тогда и только тогда, когда изображение $\{f_k\} \to \{(f\psi)_k\}$ является непрерывным в пространстве l_q $(0<q\leqq\infty)$. Например, $M_2=L^\infty$ и M_1 совпадает с классом абсолютно сходящихся рядов Фурье. Первые результаты для классов $M_q(1<q<\infty)$ получены Стечкиным и Хиршманом в терминах пространств Гёльдера и функций ограниченной β-вариации. Распространение на многомерный случай сделал Эдельштейн. Более сильные результаты для $M_q\,(1<q<\infty)$ получили Бирман и Соломяк в терминах пространств Соболева. Здесь эти результаты обобщены для $M_q\,(0<q\leqq\infty)$ в терминах пространств Бесова.

Пусть $f(x) \sim \Sigma f_k e^{ikx}$ есть ряд Фурье 2π-периодической функции f, определенной в $\boldsymbol{R}^n$. Рассмотрим изображение T_ψ: $\{f_k\} \to \{g_k\}$, где $g_k=(2\pi)^{-n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} g(x)e^{-ikx}dx$ суть коэффициенты Фурье функции $g=f\psi$. Будем говорить, что функция ψ принадлежит пространству множителей $M_q(0<q\leqq\infty)$, если линейный оператор T_ψ действует непрерывно в пространстве последовательностей l_q с квазинормой $\|\{a_k\}\|_q=\{\Sigma|a_k|^q\}^{1/q}$. Относительно квазинормы $\|\psi\|=\sup\{\|T_\psi\{f_k\}\|/\|\{f_k\}\|\}$ пространство M_q является квазибанаховым (при $b\geqq 1$ — банаховым).

Тригонометрическая проблема множителей состоит в аналитическом описании пространства M_q. Первые результаты в этом направлении получены Стечкиным [1] и Хиршманом [2] (в терминах пространств Гёльдера и функций ограниченной β-вариации). Затем они были обобщены Бирманом и Соломяком [3] на многомерный случай (в терминах пространств Соболева). Распространение результатов Стечкина и Хиршмана на многомерный случай сделал Эдельштейн [4]. Здесь будет показано как с помощью интерполяционного метода Петре [5, 6] можно доказывать более сильные результаты (в терминах пространств Бесова).

Напомним некоторые факты и определения. Из тождества Парсеваля сразу следует равенство

$$M_2=L^\infty. \tag{1}$$

Далее, поскольку $(T_\psi)^*=T_{\bar\psi}$, то

$$M_q=M_{q'},\quad 1\leqq q\leqq\infty,\quad 1/q+1/q'=1. \tag{2}$$

Будем говорить, что (F_0, F_1) — совместная пара, если F_0 и F_1 суть (полу)нормированные пространства, содержащиеся в одном и том же хаусдорфовом линейном топологическом пространстве. Тогда в пространстве F_0+F_1 можно ввести семейство (полу)норм с помощью функции Петре:

$$K(t, a)=K(t, a;\ F_0, F_1)=\inf\{\|a_0\|_{F_0}+t\|a_1\|_{F_1};\ a=a_0+a_1\},\ t>0.$$

Пространство $(F_0, F_1)_{\theta q}$ $(0<\theta<1,\ 0<q\leq\infty)$ снабжается (полу)квазинормой $N(a\,|\,(F_0, F_1)_{\theta q})=[\int_0^\infty t^{-\theta q}K^q(t, a)\frac{dt}{t}]^{1/q}$ и имеет следующее интерполяционное свойство.

Теорема А. *Если* (F_0, F_1) *и* (G_0, G_1) — *две совместные пары и* $T\colon\ F_i\to G_i$ — *линейный непрерывный оператор с (полу)нормой* $\|T\|_i\ (i=0,1)$, *то* $T\colon(F_0, F_1)_{\theta q}\to(G_0, G_1)_{\theta q}$ *есть снова непрерывный оператор с (полу)квазинормой* $\|T\|_\theta\leq\|T\|_0^{1-\theta}\|T\|_1^\theta$.

Отметим интерполяционную теорему Рисса.

Теорема В. $(l_{q_0}, l_{q_1})_{\theta q}=l_q,\ 1/q=(1-\theta)/q_0+\theta/q_1,\ 0<q_0, q_1\leq\infty$.

Теперь из свойства (2) и теорем А, В получаем вложение

(3) $$M_p\subset M_q,\quad 1\leq p\leq q\leq 2.$$

В частности,

(4) $$M_p\subset L^\infty,\quad 1\leq p\leq\infty.$$

Далее, если f — тригонометрический полином, то для периодической функции $\psi\in L^1$ имеем $g_k=\Sigma_j f_j\psi_{k-j}$. Поэтому $\|\{g_k\}\|_q\leq\|\{\psi_k\}\|_q\|\{f_k\}\|_q$ при $0<q\leq 1$. Если $\boldsymbol{F}\colon\psi\to\{\psi_k\}$, то

(5) $$\boldsymbol{F}(M_q)=l_q,\quad \|\psi\|_q=\|\{\psi_k\}\|_q,\quad 0<q\leq 1.$$

Теперь вложения (3), (4) можно дополнить: $M_p\subset M_q\subset L^\infty,\ 0<p\leq q\leq\infty$.

Пространство Бесова $\dot B^\alpha_{p,q}$ $(\alpha>0,\ 1\leq p\leq\infty,\ 0<q\leq\infty)$ есть пространство 2π-периодических функций в $\boldsymbol{R}^n$, т. ч. $N(f\,|\,\dot B^\alpha_{p,q})=[\int_0^\infty t^{-\alpha q}\omega_p^q(t, f)\frac{dt}{t}]^{1/q}<\infty$ где $\omega_p(t, f)=\sup\{\|\Delta^m(h)f\|_p;\ |h|\leq t\}$ есть модуль непрерывности и $\|f\|_p$ — L^p-норма функции f, $\|f\|_p=[\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}|f(x)|^p dx]^{1/p}$.

Имеет место равенство [5, 7]

(6) $$(L^p, \dot W^m_p)_{\alpha/m,\, q}=\dot B^\alpha_{p,q},\quad 0<\alpha<m,$$

где $\dot W^m_p$ есть пространство Соболева периодических функций с полунормой $N(f\,|\,\dot W^m_p)=\Sigma_{|\varkappa|=m}\|D^\varkappa f\|_p$.

Теорема 1. *Если* $1/q=1/2+\alpha/n$, *то*

(7) $$\sum_{|k|\neq 0}|f_k|^q\leq C[N(f\,|\,\dot B^\alpha_{2,q})]^q.$$

Первое доказательство. Очевидно $\boldsymbol{F}\colon L^2\to l_2$ и $\boldsymbol{F}\colon\dot W^m_2\to l_{2,m}$ действует изоморфно, где $l_{2,m}$ есть пространство последовательностей $\{a_k\}$ с полунормой $\|\{a_k\}\|_{2,m}=\{\Sigma|k|^{2m}|a_k|^2\}^{1/2}$. Тогда по теореме А, учитывая (6), имеем

(8) $$N(\{f_k\}\,|\,b_{\alpha,q})\leq CN(f\,|\,\dot B^\alpha_{2,q}),\quad b_{\alpha,q}=(l_2, l_{2,m})_{\alpha/m,\, q}.$$

Пусть $K(t)$ есть функция $K(t, \{f_k\};\ l_2, l_{2,m})$. Положим $\mu_k^2 = \int_0^\infty t^{-\alpha q/m} K^{q-2}(t) \min(1, |k|^{2m}t^2)\frac{dt}{t}$. Так как $K^2(t) \asymp \Sigma |f_k|^2 \min(1, |k|^{2m}t^2)$, то

$$\Sigma |f_k|^2 \mu_k^2 \asymp [N(\{f_k\} \mid b_{\alpha, q})]^q. \tag{9}$$

С другой стороны, используя неравенства $\min(1, t\lambda)K(1/\lambda) \leq K(t) \leq \max(1, t\lambda)K(1/\lambda)$, получаем $\mu_k^2 \asymp |k|^{\alpha q} K^{q-2}(|k|^{-m})$, $|k| \neq 0$. Поэтому

$$\sum_{|k|\neq 0} \mu_k^{2q/(q-2)} \leq C[N(\{f_k\} \mid b_{\alpha, q})]^q, \quad 1/q = 1/2 + \alpha/n. \tag{10}$$

С помощью неравенства Гёльдера из (9) и (10) находим $\Sigma_{|k|\neq 0} |f_k|^q \leq C[N(\{f_k\} \mid b_{\alpha, q})]^q$. Отсюда и из (8) следует (7).

Второе доказательство. Из тождества Парсеваля следует равенство $4^m \Sigma |f_k|^2 |\sin(kh/2)|^{2m} = \| \Delta^m(h) f \|_2^2$. Отсюда получаем оценку

$$\Sigma |f_k|^2 \mu_k^2 \leq C[N(f \mid \dot{B}^{\alpha}_{2, q})]^q, \tag{11}$$

где $\mu_k^2 = 4^m \int_{\boldsymbol{R}^n} |\sin(kh/2)|^{2m} |h|^{-n-\alpha q} [\omega_2(|h|, f)]^{q-2} dh$, $f \neq \mathrm{const}$. Пусть $|k| \neq 0$. Тогда последний интеграл можно оценить снизу, интегрируя по области $|h| > 1/|k|$ и используя монотонность модуля непрерывности. В результате получаем $\mu_k^2 \geq C |k|^{\alpha q} [\omega_2(|k|^{-1}, f)]^{q-2}$ при $|k| \neq 0$. Следовательно,

$$\sum_{|k|\neq 0} \mu_k^{2q/(q-2)} \leq C[N(f \mid \dot{B}^{\alpha}_{2, q})]^q,\ 1/q = 1/2 + \alpha/n,\ f \neq \mathrm{const}. \tag{12}$$

Теперь из (11) и (12) и неравенства Гёльдера снова получаем (7).

Из теоремы 1 вытекает

Следствие. *Если* $1/q = 1/2 + \alpha/n$, $\alpha/n \geq 1/2$, *то* $\|\psi\|_q \leq C[N(\psi \mid \dot{B}^{\alpha}_{2, q}) + |\psi_0|]$, *где* $\psi_0 = (2\pi)^{-n} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \psi(x) dx$ *есть нулевой коэффициент Фурье функции* ψ.

Теорема 2. *Если* $1/q = 1/2 + 1/p$, $2 \leq p < \infty$, *то*

$$\|\psi\|_q \leq C[N(\psi \mid \dot{B}^{n/p}_{p,1}) + |\psi_0|]. \tag{13}$$

Доказательство. Согласно следствию и равенству (1), имеем соотношения $\dot{B}^{n/2}_{2,1} \subset M_1$ и $L^\infty = M_2$. Следовательно,

$$(\dot{B}^{n/2}_{2,1},\ L^\infty)_{\theta,1} \subset (M_1, M_2)_{\theta,1}. \tag{14}$$

Докажем, что

$$\dot{B}^{n/p}_{p,1} \subset (\dot{B}^{n/2}_{2,1},\ L^\infty)_{\theta,1}, \quad 1/p = (1-\theta)/2. \tag{15}$$

Для этого будем использовать следующее представление функции $\psi \in \dot{B}^{n/p}_{p,1}$, доказанное в [7]:

$$\psi(x) = c_\psi + \Sigma \psi * \omega_k(x), \tag{16}$$

где $\psi \to c_\psi$ — линейный функционал, и ряд сходится в L^∞. Здесь $\omega_k(x) = 2^{-kn}\omega(x \,.\, 2^{-k})$, $\int_{\boldsymbol{R}^n} \omega(x) dx = 0$. При этом финитная и достаточно гладкая функция ω выбрана так, чтобы

(17) $$\psi * \omega_k = 2^{2mk} a_k * A\psi, \quad \psi \in \dot{W}_p^{2m},$$

где $a_k(x) = 2^{-kn} a(x \cdot 2^{-k})$, a — финитная достаточно гладкая функция и $A = (-\Delta)^m$ — m-ая степень оператора Лапласа.

Из периодичности функции ψ и свойства $\int_{R^n} \omega(x) dx = 0$ следует, что $c_\psi = \psi_0$, т. е. представление (16) имеет вид

(18) $$\psi(x) = \psi_0 + \Sigma \psi * \omega_k(x), \quad \psi \in \dot{B}_{p,1}^{n/p}.$$

Далее, $\| \psi * \omega_k \|_2 \leq C \| \psi \|_2$ и $N(\psi * \omega_k \mid \dot{W}_2^n) \leq C \cdot 2^{-kn} \| \psi \|_2$. Поэтому $N(\psi * \omega_k \mid \dot{B}_{2,1}^{n/2}) \leq C \cdot 2^{-kn/2} \| \psi \|_2$. Поскольку $\| \psi * \omega_k \|_\infty \leq C \| \psi \|_\infty$, то

(19) $$\| \psi * \omega_k \|_B \leq C \cdot 2^{-kn/p} \| \psi \|_p, \quad B = (\dot{B}_{2,1}^{n/2}, L^\infty)_{\theta, 1}, \ 1/p = (1-\theta)/2.$$

Аналогично, используя равенство (17), получаем

(20) $$\| \psi * \omega_k \|_B \leq C \cdot 2^{2mk - kn/p} N(\psi \mid \dot{W}_p^{2m}).$$

Теперь (19) и (20) дают оценку $\| \psi * \omega_k \|_B \leq C \cdot 2^{-kn/p} \cdot K(2^{2mk}, \psi; L^p, \dot{W}_p^{2m})$. Отсюда, учитывая равенство (6), получаем $\Sigma \| \psi * \omega_k \|_B \leq C \cdot N(\psi \mid \dot{B}_{p,1}^{n/p})$. Это, вместе с (16), доказывает вложение (15).

Теперь докажем, что

(21) $$(M_1, M_2)_{\theta, 1} \subset M_q, \ 1/q = 1 - \theta/2.$$

Действительно, билинейное изображение $\Gamma(\psi, a) = T_\psi a$ действует непрерывно: $l_1 \times M_1 \to l_1$ и $l_2 \times M_2 \to l_2$. Согласно теореме об интерполяции билинейных изображений [8], Γ: $(l_1, l_2)_{\theta, q} \times (M_1, M_2)_{\theta, 1} \to (l_1, l_2)_{\theta, q}$, откуда следует (21).

Из (14), (15) и (21) следует вложение $\dot{B}_{p,1}^{n/p} \subset M_q$, $1/q = 1/2 + 1/p$. При этом, $\| \psi - \psi_0 \|_q \leq C \cdot N(\psi \mid \dot{B}_{p,1}^{n/p})$. Так как $\| \psi_0 \|_q = |\psi_0|$, то отсюда получаем (13).

Замечание 1. Можно доказать тем же методом аналог теоремы 2 при $1 \leq p < 2$. Однако полученный результат будет не лучше, чем утверждение $\dot{B}_{p,1}^{n/p} \subset M_1$, $1 \leq p < 2$, которое следует из теоремы 2 и теоремы вложения $\dot{B}_{p,1}^{n/p} \subset \dot{B}_{2,1}^{n/2}$, $1 \leq p < 2$.

Замечание 2. Результаты теорем 1 и 2 являются точными. Именно, нельзя расширить пространство, стоящее в левой части вложения $\subset$ без того чтобы оно не нарушалось.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Б. Стечкин. О билинейных формах. *Доклады АН СССР*, **71**, 1950, № 3, 237—240.
2. I. I. Hirshman. On multiplier transformations. *Duke Math. J.*, **26**, 1959, No 2, 221—242.
3. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк. Количественный анализ в теоремах вложения Соболева и приложения к спектральной теории. — В: X мат. школа. Киев, 1974, 5—189.
4. С. Л. Эдельштейн. Ограниченность оператора свертки в $L_p(Z^m)$ и гладкость символа оператора. *Мат заметки*, **22**, 1977, № 6, 873—884.
5. J. Peetre. Espaces d'interpolation et theorems de Soboleff. *Ann. Inst. Fourier*, **16**, 1966, No 1, 279—317.

6. J. Peetre. On interpolation of L_p spaces with weight functions. *Acta Sci. Math. Szeged*, **28**, 1967, No 1, 61—70.
7. Г. Е. Караджов. Поведение на бесконечности функции из пространств $\dot{B}^{\alpha}_{p,q}$. *Сердика*, **3**, 1977, 327—335.
8. I. L. Lions, J. Peetre. Sur une classe d'espaces d'interpolation. *Publ. Math. de l'IHES*, **19**, 1964, 5—68.

Център по математика и механика, БАН
1090 София, п. к. 373 *България*

Получено 3 июня 1981 г.