КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'81
София, 1983, с. 87—92

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
Sofia, 1983, p. 87—92

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ КЛАССА $W^rH_\omega[0, 1]$ КВАЗИСПЛАЙНАМИ

Г. Х. Киров, П. Д. Пройнов

Резюме. В работе получены оценки приближения функций класса $W^rH_\omega[0, 1]$ ($r=1, 2, 3, \ldots$; $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности) квазисплайнами $L_n(k_m, f_r; x)$ в равномерной метрике. При $r=1$ полученные оценки являются точными.

1. Обозначения. В дальнейшем используются следующие обозначения:

$\mathbf{N}$ — множество всех натуральных чисел;

$\mathbf{N}_0$ — множество всех целых неотрицательных чисел;

$\mathbf{R}$ — множество всех вещественных чисел;

$C^r[a, b]$ — множество всех функций f, у которых r-ая производная непрерывна на отрезке $[a, b]$ ($r\in\mathbf{N}_0$, $C^0[\cdot,\cdot]=C[\cdot,\cdot]$);

C — пространство всех функций $f\in C[a, b]$ с нормой $\|f\|_C=\max\{|f(x)| : a\leq x\leq b\}$;

$\omega(t)$ — заданный модуль непрерывности, т. е. заданнная на $[0, +\infty)$ непрерывная, неубывающая и полуаддитивная функция, в нуле, равная нулю;

$\omega(f; \delta)=\sup\{|f(x)-f(t)| : |x-t|\leq\delta,\ a\leq x, t\leq b\}$ — модуль непрерывности функции $f\in C[a, b]$;

$$W^rH_\omega[a, b]=\{f : f\in C^r[a, b],\ \omega(f^{(r)}; \delta)\leq\omega(\delta),\ \delta\in[0, b-a]\};$$

A — множество всех вещественных функций f, которые финитны с носителем $[-1, 1]$, четные, неубывающие в $[-1, 0]$ и удовлетворяющие условию $\int_{-1}^{1} f(t)dt=1$;

$S_\nu(f, \alpha; x)$ — полином Тейлора степени ν для функции $f\in C^r[a, b]$ в точке $\alpha\in[a, b]$, т. е.

$$S_\nu(f, \alpha; x)=\sum_{j=0}^{\nu}\frac{(x-\alpha)^j}{j!}f^{(j)}(\alpha),\ \nu=\overline{0, r}; \tag{1}$$

$\tau_n=\{0=x_0<x_1\cdots<x_n=1\}$ — заданная сетка отрезка $[0, 1]$;

$h_i=x_i-x_{i-1}$, $i=\overline{1, n}$, — i-тый шаг сетки τ_n;

$|\tau_n|=\max\{h_i : i=\overline{1, n}\}$ — диаметр сетки τ_n;

$k_m(x)$ — базисные квазисплайны m-го порядка ($m\in\mathbf{N}_0$), которые мы введем индуктивно [1]:

(2) $$k_0(x)=k(x),\ k_m(x)=\int\limits_{2x-1}^{2x+1} k_{m-1}(t)dt,\ x\in\mathbf{R},\ m\in\mathbf{N},$$

где $k(x)$ — произвольная функция класса A; $\widetilde{L}_n(k_m, f_\nu; x)$ — квазисплайн m-го порядка, ν-ой степени ($m, \nu\in\mathbf{N}$), порожденный базисным квазисплайном $k_m(x)$, функцией $f\in C^r[0, 1]$ и сеткой τ_n. Если $x\in[x_{i-1}, x_i]$, $i=\overline{1, n}$, то по определению [1]

(3) $$\widetilde{L}_n(k_m, f_\nu; x)=S_\nu(f, x_{i-1}; x)k_m(u)+S_\nu(f, x_i; x)k_m(1-u),$$

где

(4) $$u=(x-x_{i-1})/h_i.$$

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Если m, n, $r\in\mathbf{N}$, а $\omega(t)$ — заданный модуль непрерывности, то*

(5) $$\inf_{\tau_n}\sup_{f\in W^rH_\omega[0,1]}\|f(\cdot)-\widetilde{L}(k_m, f_r;\cdot)\|_C\leq\frac{M_r\left(k_m\ \omega, \frac{1}{n}\right)}{(r-1)!\,n^r},$$

где

(6) $$M_r(k_m, \omega, z)=\max\{\varphi_r(k_m, \omega, z, u): 0\leq u\leq 1\},$$

(7) $$\varphi_r(k_m, \omega, z, u)=k_m(u)\int\limits_0^u(u-v)^{r-1}\omega(zv)dv+k_m(1-u)\int\limits_u^1(v-u)^{r-1}\omega(z(1-v))dv.$$

Доказательство. Пусть $f\in W^rH_\omega[0, 1]$. Используя формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме и очевидное равенство

$$\frac{(x-\alpha)^r}{r!}f^{(r)}(\alpha)=\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_\alpha^x(x-t)^{r-1}f^{(r)}(\alpha)dt,$$

мы получаем, что

$$f(x)=S_r(f, \alpha; x)+\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_\alpha^x(x-t)^{r-1}[f^{(r)}(t)-f^{(r)}(\alpha)]dt.$$

Учитывая последнее равенство, а также (см. [1]), что для любого $u\in[0, 1]$

(8) $$k_m(u)+k_m(1-u)=1,$$

мы найдем, что

(9) $$f(x)-\widetilde{L}_n(k_m, f_r; x)=\frac{k_m(u)}{(r-1)!}\int\limits_{x_{i-1}}^x(x-t)^{r-1}[f^{(r)}(t)-f^{(r)}(x_{i-1})]dt$$
$$+\frac{k_m(1-u)}{(r-1)!}\int\limits_{x_i}^x(x-t)^{r-1}[f^{(r)}(t)-f^{(r)}(x_i)]dt.$$

Так как $f\in W^rH_\omega[0, 1]$, то из (9) получим

(10) $$|f(x)-\widetilde{L}_n(k_m, f_r; x)|\leq\frac{k_m(u)}{(r-1)!}\int\limits_{x_{i-1}}^x(x-t)^{r-1}\omega(t-x_{i-1})dt$$

$$+\frac{k_m(1-u)}{(r-1)!}\int\limits_x^{x_i}(t-x)^{r-1}\omega(x_i-t)dt,\ x\in[x_{i-1},x_i],\ i=\overline{1,n}.$$

Применяя подстановку $v=(t-x_{i-1})/h_i$, из (10) и (4) найдем

$$|f(x)-\tilde{L}_n(k_m,f_r;x)\leq\frac{h_i^r}{(r-1)!}\varphi_r(k_m,\omega,h_i,u).$$

Отсюда, если учтем, что $h_i\leq|\tau_n|$, $i=\overline{1,n}$, следует

$$\|f(\cdot)-\tilde{L}_n(k_m,f_r;\cdot)\|_C\leq\frac{|\tau_n|^r}{(r-1)!}M_r(k_m,\omega,|\tau_n|)$$

для любой функции $f\in W^rH_\omega[0,1]$.

Наконец, замечая, что правая сторона этого неравенства не зависит от функции $f(x)$ и что $\inf\{|\tau_n|:\tau_n\}=1/n$, мы получим (5).

Этим лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если $m,n\in\mathbf{N}$, $m\neq1$, $\omega(t)$ — неубывающая функция на отрезке $[0,1]$, непрерывная в нуле и равная нулю в нуле, а функция $\omega(t)/t$ не возрастает в $(0,1]$, то для любого $u\in[0,1]$ выполняется неравенство $\varphi_1(k_m,\omega,1/n,u)\leq M_1(k_m,\omega,1/n)=\varphi_1(km,\omega,1/n,1/2)=n\int_0^{1/2n}\omega(t)dt$.*

Доказательство. Из условий леммы вытекает (см., например, [2, стр. 44]), что $\omega(t)$ является модулем непрерывности.

В формуле (7) положим $r=1$, $z=1/n$ и сделаем подстановку $t=v/n$ в первом интеграле и $t=(1-v)/n$ — во втором интеграле. Получаем

$$\varphi_1(k_m,\omega,1/n,u)=n[k_m(u)\int\limits_0^{u/n}\omega(t)dt+k_m(1-u)\int\limits_0^{(1-u)/n}\omega(t)dt].\tag{11}$$

Так как $k_m(1)=0$, $k_m(0)=1$, $k_m(\pm1/2)=1/2$ (см. [1]), то из (11) найдем $\varphi_1(k_m,\omega,1/n,0)=\varphi_1(k_m,\omega,1/n,1)=0$, $\varphi_1(k_m,\omega,1/n,1/2)=n\int_0^{1/2n}\omega(t)dt$, и так как $\varphi_1(k_m,\omega,1/n,u)=\varphi_1(k_m,\omega,1/n,1-u)$, $u\in[0,1]$, то

$$M_1(k_m,\omega,1/n,u)=\max\{\varphi_1(k_m,\omega,1/n,u):0<u\leq1/2\}.\tag{12}$$

С помощью тождества (8) мы можем переписать равенство (11) в виде

$$n^{-1}\varphi_1(k_m,\omega,\frac{1}{n},u)=\int\limits_0^{(1-u)/n}\omega(t)dt+k_m(u)[\int\limits_0^{u/n}\omega(t)dt-\int\limits_0^{(1-u)/n}\omega(t)dt].\tag{13}$$

При $m\geq2$ путем дефференцирования из (2) и (13) получаем $k_m'(u)=-2k_{m-1}(2u-1)\leq0$, $0<u\leq1/2$, $1/n\varphi_1'(k_m,\omega,1/n,u)=-1/n\omega((1-u)/n)+k_m'(u)\int_{(1-u)/n}^{u/n}\omega(t)dt+n^{-1}k_m(u)[\omega(u/n)+\omega((1-u)/n)]$, $0<u\leq1/2$.

Отсюда получаем оценку

$$n^{-1}\varphi_1'(k_m,\omega,1/n,u)\geq-n^{-1}\omega((1-u)/n)+n^{-1}k_m(u)[\omega(u/n)+\omega((1-u)/n)],$$

которая вместе с неравенством (см. [3]) $k_m(u)\geq1-u$, $0\leq u\leq1/2$, $m\in\mathbf{N}$, дает $n^{-1}\varphi_1'(k_m,\omega,\frac{1}{n},u)\geq n^{-1}u(1-u)[u^{-1}n(\omega(u/n)-(1-u)^{-1}n\omega((1-u)/n)]$.

Так как для любого $n\in\mathbf{N}$ и для любого $u\in(0,1/2]$ имеем $u/n\leq(1-u)/n$, а также по условию имеем, что функция $\omega(t)/t$ не возрастает в $(0,1]$, то из последней оценки найдем, что $\varphi_1'(k_m, \omega, 1/n, u) \geq 0$ для любых $m, n \in \mathbf{N}$, $m \neq 1$ и для любого $u \in (0, 1/2]$. Отсюда и из (12), следует, что

$$M_1(k_m, \omega, 1/n) = \varphi_1(k_m, \omega, 1/n, 1/2),$$

и тем самым лемма 2 доказана.

3. Оценки приближения функций класса $W^r H_\omega[0, 1]$ квазисплайнами.

Теорема 1. *Если* $m, n \in \mathbf{N}$, $m \neq 1$, *а* $\omega(t) \neq 0, t \in [0, 1]$ — *выпуклый вверх модуль непрерывности, то*

$$(14) \qquad \sup_{\omega} \inf_{\tau_n} \sup_{f \in W^r H_\omega[0,1]} \| f(\cdot) - \tilde{L}_n(k_m, f_1; \cdot) \|_C \Big/ \int_0^{1/2n} \omega(t)\,dt = 1.$$

Доказательство. Так как $\omega(t)$, $t \in [0, 1]$ является выпуклым модулем непрерывности, то (см., например, [2, стр. 45]) функция $\omega(t)/t$ не возрастает в $[0, 1]$. Теперь применяя обе леммы 1,2, получаем неравенство

$$(15) \qquad \inf_{\tau_n} \sup_{f \in W^1 H_\omega[0,1]} \| f(\cdot) - \tilde{L}_n(k_m, f_1; \cdot) \|_C \leq \int_0^{1/2n} \omega(t)\,dt.$$

Чтобы доказать теорему, осталось указать экстремальный выпуклый вверх модуль непрерывности и соответствующую ему функцию, для которой неравенство (15) переходит в равенство.

Рассмотрим выпуклый модуль непрерывности

$$\bar{\omega}(t) = \begin{cases} t, & \text{если} \quad 0 \leq t \leq 1/n, \\ 1/n, & \text{если} \quad 1/n \leq t \leq 1, \end{cases}$$

и функцию

$$\bar{f}(t) = \begin{cases} t/2n - t^2/2, & \text{если} \quad 0 \leq t \leq 1/n, \\ n^{-2} - 3t/2n + t^2/2, & \text{если} \quad 1/n \leq t \leq 2/n, \\ \bar{f}(t) = \bar{f}(t - 2/n), & \text{если} \quad 2/n \leq t \leq 1 \qquad (n \geq 2). \end{cases}$$

Функция $\bar{f}$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$ и имеет производную

$$\bar{f}'(t) = \begin{cases} (1/2n - t, & \text{если} \quad 0 \leq t \leq 1/n, \\ -3/2n + t, & \text{если} \quad 1/n \leq t \leq 2n, \\ \bar{f}'(t) = \bar{f}'(t - 2/n), & \text{если} \quad 2/n \leq t \leq 1 \qquad (n \geq 2). \end{cases}$$

При этом имеем $\bar{f}'(0) = 1/2n$, $\bar{f}'(1/n) = -1/2n$ и

$$\omega(\bar{f}'; t) = \begin{cases} t, & \text{если} \quad 0 \leq t \leq 1/n, \\ 1/n, & \text{если} \quad 1/n \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Следовательно, $\bar{f} \in W^1 H_{\bar{\omega}}[0, 1]$.

Обозначая через $L_n(k_m, \bar{f}_1; x)$ квазисплайн m-ого порядка первой степени, который порождается функцией $\bar{f}$ и сеткой $\tau_n = \{i/n\}_{i=0}^n$, из (9) найдем

$$\| \bar{f}(\cdot) - L_n(k_m, \bar{f}_1; \cdot) \|_C \geq | \bar{f}(1/2n) - L_n(k_m, \bar{f}_1; 1/2n) |$$

$$= \left| 2^{-1} \int_0^{1/2n} [\bar{f}'(t) - \bar{f}'(0)]\,dt + \frac{1}{2} \int_{1/n}^{1/2n} [\bar{f}'(t) - \bar{f}'(1/n)]\,dt \right| = \int_0^{1/2n} \bar{\omega}(t)\,dt.$$

Теорема доказана.

Простым следствием теоремы 1 и задачи 71 [6, (стр. 77)] является следующее утвержденне.

Следствие 1. *Если $m, n \in \mathbf{N}$, $m \neq 1$, а $\omega(t) \not\equiv 0$, $t \in [0, 1]$ — выпуклый вверх модуль непрерывности, то*

$$\sup_{\omega} \inf_{\tau_n} \sup_{f \in W^1 H_\omega[0,1]} \| f(\cdot) - L_n(k_m, f_1; \cdot) \|_C / \omega(1/4n) = 1/2n.$$

При этом экстремальными являются, снова, модуль непрерывности $\bar{\omega}(t)$ и функция $\bar{f}(t)$.

Отметим, что и в дальнейшем через $L_n(k_m, f_\nu; x)$ будем обозначать квазисплайн, порожденный равномерной сеткой $\tau_n = \{i/n\}_{i=0}^n$.

Теорема 2. *Если $m, n \in \mathbf{N}$, $m \neq 1$, то для любой функции $f \in C^1[0, 1]$ выполняется неравенство $\| f(\cdot) - L_n(k_m, f_1; \cdot) \|_C \leq 2 \int_0^{1/2n} \omega(f'; t) dt$.*

Доказательство. Используя лемму С. Б. Стечкина [4, стр. 78], построим выпуклый вверх модуль непрерывности $\omega^*(t)$ со свойством $\omega(f'; t) \leq \omega^*(t) \leq 2\omega(f'; t)$. Тогда $f \in W^1 H_{\omega^*}[0, 1]$ и, следовательно, согласно теореме 1, будем иметь $\| f(\cdot) - L_n(k_m, f_1; \cdot) \|_C \leq \int_0^{1/2n} \omega^*(t)\, dt \leq 2 \int_0^{1/2n} \omega(f'; t)\, dt$. Теорема доказана.

Из следствия 1 тем же способом, которым доказали теорему 2, получаем следующее следствие.

Следствие 2, *Если $m, n \in \mathbf{N}$, $m \neq 1$, то для любой функции $f \in C^1[0, 1]$ $\| f(\cdot) - L_n(k_m, f_1; \cdot) \|_C \leq n^{-1} \omega(f'; 1/4n)$.*

Теорема 3. *Если $m, n, r \in \mathbf{N}$, а $\omega(t) \not\equiv 0$ — выпуклый вверх модуль непрерывности, то*

$$\sup_{f \in W^r H_\omega[0,1]} \| f(\cdot) - L_n(k_m, f_r; \cdot) \|_C \leq \omega\left(\frac{M_{r+1}(k_m)}{n(r+1)}\right) / r!\, n^r, \tag{16}$$

где

$$M_s(k_m) = \max \{ \varphi_s(k_m; u) : 0 \leq u \leq 1 \}, \quad s \in \mathbf{N}_0, \tag{17}$$

$$\varphi_s(k_m; u) = u^s k_m(u) + (1-u)^s k_m(1-u), \quad 0 \leq u \leq 1. \tag{18}$$

Доказательство. В силу леммы 1 выполняется неравенство (5) Так как

$$\begin{gathered} \varphi_r(k_m, \omega, z, 0) = \varphi_r(k_m, \omega, z, 1) = 0, \\ \varphi_r(k_m, \omega, z, 1/2) = \int_0^{1/2} (1/2 - v)^{r-1} \omega(zv) dv > 0, \ \forall z > 0, \\ \varphi_r(k_m, \omega, z, u) = \varphi_r(k_m, \omega, z, 1-u) = k_m(u) \int_0^u (u-v)^{r-1} \omega(zv) dv \\ + k_m(1-u) \int_0^{1-u} (1-u-v)^{r-1} \omega(zv) dv, \end{gathered} \tag{19}$$

для любого $u \in]0, 1]$, то

$$M_r(k_m, \omega, 1/n) = \max \{ \varphi_r(k_m, \omega, 1/n, u) : 0 < u \leq 1/2 \}. \tag{20}$$

Из условия, что $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности, вытекает ([5, с. 154, формула (10)] и [6, с. 78, задача 74]), что

$$\beta\omega(t)\leq\omega(\beta t),\ 0\leq\beta\leq 1,\ 0\leq t\leq 1, \tag{21}$$

$$\alpha\omega(x)+\beta\omega(y)\leq\omega(\alpha x+\beta y),\ \alpha\geq 0,\ \beta\geq 0, \alpha+\beta=1,\ 0\leq x, y\leq 1. \tag{22}$$

Из (19), используя (21) и задачу 75 из [6, с. 78], легко получаем неравенство

$$\varphi_r(k_m, \omega, 1/n, u)\leq r^{-1}[k_m(u)\omega(u^{r+1}/n(r+1)+k_m(1-u)\omega((1-u)^{r+1}/n(r+1)].$$

Используя (8) и (22), отсюда находим

$$\varphi_r(k_m, \omega, 1/n, u)\leq r^{-1}\omega(\varphi_{r+1}(k_m; u)/n(r+1))\leq r^{-1}\omega(M_{r+1}(k_m)/n(r+1)).$$

Из последнего неравенства, (20) и (5) получаем (16). Этим теорема 3 доказана.

Из теоремы 3 тем же способом, которым доказали теорему 2, получаем следующее следствие.

Следствие 3. *Если $m, n, r\in\mathbf{N}$, то для любой функции $f\in C^r[0, 1]$*

$$\| f(\cdot)-L_n(k_m, f_r; \cdot)\|_C\leq 2n^{-r}(r!)^{-1}\omega(f^{(r)}; M_{r+1}(k_m)/n(r+1)),$$

где $M_{r+1}(k_m)$ определяется равенствами (17) и (18).

Наконец, отметим, что постановка задачи и результаты леммы 1, леммы 2, теоремы 1, следствия 1 и теоремы 2 принадлежат первому из авторов, а остальные результаты получены совместно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Х. Киров. Апроксимация на функции с k-сплйни. — В: Математика и математическое образование. София, 1978, 361—368.
2. И. К. Даугавет. Введение в теорию приближения функций. Ленинград, 1977.
3. Г. Х. Киров. Точные оценки приближения дифференцируемых функций k-сплайнами. *Доклады БАН*, **32**, 1979, № 7, 871—874.
4. А. В. Ефимов. Линейные методы приближения некоторых классов непрерывных периодических функций. *Матем. сб.*, **54**, 1961, № 1, 51—90.
5. В. К. Дзядык. Введение в теорию равномерного приближений функций полиномами. Москва, 1977.
6. Г. Полиа, Г. Сегё. Задачи и теоремы из анализа. Ч. I. Москва, 1956.

Пловдивски университет „Паисий Хилендарски"
4000 Пловдив *България*

Получено 4 июня 1981 г.