КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'81
София, 1983, с. 93—98

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
Sofia, 1983, p. 93—98

НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ И СУЩЕСТВЕННАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

В. И. Коляда

Резюме. В статье изучается вопрос о зависимости между наилучшими приближениями граничных значений функций из пространств Харди $H^p(0<p<\infty)$ и их существенной непрерывностью. Доказывается следующая

Теорема. Пусть $0<p<\infty$ и $\{\lambda_n\}$ — убывающая стремящаяся к нулю последовательность действительных чисел, для которой $\sum_{n=1}^{\infty} n^{1/p-1}\lambda_n<\infty$. Тогда найдется аналитическая ограниченная в единичном круге функция $f(re^{\varphi i})$ такая, что граничная функция $f(e^{i\varphi})$ существенно разрывна в каждой точке единичной окружности, и $E_n(f)_p=O(\lambda_n)$.

Пусть $g(\varphi)$ — измеримая комплекснозначная функция на $[0,2\pi]$. Функция $g(\varphi)$ существенно непрерывна в точке $\varphi_0\in[0, 2\pi]$, если существует функция $g^*(\varphi)$, эквивалентная $g(\varphi)$ и непрерывная в точке φ_0. В противном случае будем говорить, что $g(\varphi)$ существенно разрывна в точке φ_0.

Справедлива следующая теорема (А. А. Конюшков и С. Б. Стечкин [1]).

Теорема А. *Если наилучшие приближения тригонометрическими полиномами в L^p действительной функции $f\in L^p[0, 2\pi]$ $(1\leq p<\infty)$ удовлетворяют условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1/p-1}E_n(f)_p<\infty, \tag{1}$$

то функция f эквивалентна некоторой 2π-периодической непрерывной на $[0,2\pi]$ функции.

Теорема А неулучшаема (см. [2]; следует отметить, что функция из соответствующего контрпримера в [2] непрерывна на $(0, 2\pi)$, а её разрывность в нуле вызвана существенной неограниченностью).

Пусть теперь $f(re^{i\varphi})$ — функция из пространства $H^p(0<p<\infty)$ в единичном круге. Тогда для почти всех $\varphi\in[0, 2\pi]$ существует $\lim_{r\to1-0} f(re^{i\varphi})=f(e^{i\varphi})\in L^p[0, 2\pi]$. Наилучшие приближения граничной функции $f(e^{i\varphi})$ в L^p полиномами $T_n(\varphi)=\sum_{k=0}^n c_ke^{ik\varphi}$ $(c_k\in \mathbf{C})$ будем обозначать через $E_n(f)_p$,

$$E_n(f)_p=\inf_{T_n}\|f-T_n\|.$$

Утверждение и доказательство теоремы A сохраняют силу для граничных функций $f(e^{i\varphi})$ и $0<p<\infty$. Но теперь возникают следующие вопросы: быть может, для граничных функций возможны лучшие результаты по сравнению с общим случаем? Может ли более слабое условие, нежели (1), гарантировать существенную непрерывность функции $f(e^{i\omega})$ хотя бы в одной точке, если дополнительно предположить, что эта функция *ограничена*? Предлагаемая заметка посвящена построению контрпримера, дающего отрицательный ответ на эти вопросы.*

Теорема. *Пусть $0<p<\infty$, и $\{\lambda_n\}$ — убывающая стремящаяся к нулю последовательность действительных чисел, для которой*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1/p-1}\lambda_n=\infty. \tag{2}$$

Тогда найдется аналитическая ограниченная в единичном круге функция $f(re^{i\varphi})$, такая, что граничная функция $f(e^{i\varphi})$ существенно разрывна в каждой точке $\varphi\in[0, 2\pi]$, и $E_n(f)_p=O(\lambda_n)$.

Доказательство. Обозначим $s=[(2p)^{-1}]+1$ и $\lambda_n^*=\lambda_{2(n+1)s}$. В силу (2),

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1/p-1}\lambda_n^*=\infty. \tag{3}$$

Так же, как в работе [2] (стр. 212), положим $n_1=1$, $n_{k+1}=\min\{\nu:\nu\geq 2n_k, \lambda_\nu^*<2^{-1}\lambda_{n_k}^*\}$ и определим последовательность $\{\mu_k\}$.

$$\mu_k=\begin{cases}\lambda_{n_{k+1}}^*, & \text{если}\quad n_{k+1}=2n_k,\\ \frac{1}{2}\lambda_{n_k}^*, & \text{если}\quad n_{k+1}>2n_k \quad (k=1, 2, \dots).\end{cases}$$

Ясно, что выполняются следующие свойства:

$$n_{k+1}\geq 2n_k, \tag{4}$$

$$\mu_{k+1}<\frac{1}{2}\mu_k, \tag{5}$$

$$\lambda_n^*\geq\mu_k \quad \text{для} \quad n_k\leq n<n_{k+1}. \tag{6}$$

Кроме того (см. [2, с. 513]), в силу (3), $\Sigma_{k=1}^{\infty} n_{k+1}^{1/p}\mu_k=\infty$. Теперь выберем положительную последовательность $\{\omega_k\}$ так, чтобы было

$$\omega_k\leq\mu_k n_{k+1}^{1/p}, \tag{7}$$

$$\omega_k<1, \quad \lim_{k\to\infty}\omega_k=0, \tag{8}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k=\infty. \tag{9}$$

Зададим число $\eta\geq 1$. В силу (8) и (9), существует последовательность натуральных чисел $\{\nu_j\}$ ($\nu_j=\nu_j(\eta)$) с $\nu_1=1$, такая, что

$$1>\Big|\sum_{m=1}^{\nu_j-1}(-1)^{\tau_m}\omega_m-[1+(-1)^j]\eta\Big|\to 0, \tag{10}$$

---

* Заметим, что близкие вопросы рассматривались в работе автора [3].

где $\tau_m = k+1$ при $\nu_k \leqq m < \nu_{k+1}$. Из (8) и (10) следует, что

(11) $$\nu_{j+1} - \nu_j \to \infty \text{ при } j \to \infty.$$

Рассмотрим теперь тригонометрические полиномы

$$J_n(\varphi) = n^{1-2s}\left(\sin\frac{n\varphi}{2}/\sin\frac{\varphi}{2}\right)^{2s} = \sum_{k=-(n-1)s}^{(n-1)s} c_k^{(n)} e^{ik\varphi}.$$

Известно (см., например, [4, с. 106]), что при любом $q \geqq \min(1, p)$

(12) $$\| J_n \|_q \leqq C_{q,s} n^{1-1/q}.$$

Далее, введем алгебраические полиномы

$$J_n^*(re^{i\varphi}) = e^{ins\varphi} \sum_{k=-(n-1)s}^{(n-1)s} c_k^{(n)} r^{k+ns} e^{ik\varphi},$$

и, фиксируя нечетное число l, составим ряд

(13) $$\sum_{k=\nu_l}^{\infty} (-1)^{\tau_k} \frac{\omega_k}{n_{k+1}} J_{n_{k+1}}^*(re^{i\varphi}), \quad 0 \leqq r \leqq 1.$$

Нетрудно показать, что на любом замкнутом подмножестве единичного круга $|z| \leqq 1$, не содержащем точки $z=1$, полиномы $J_n^*(re^{i\varphi})$ ограничены в совокупности, и ряд (13) равномерно сходится. Отсюда следует, что всюду в круге $|z| \leqq 1$, за исключением точки $z=1$, ряд (13) сходится к непрерывной функции $f_\eta^{(l)}(re^{i\varphi})$, аналитической внутри этого круга.

Оценим действительную и мнимую части функции $f_\eta^{(l)}(e^{i\varphi})$. Пусть

(14) $$\pi/n_{m+1} < \varphi \leqq \pi/n_m, \quad m \geqq 1$$

предположим, что $\nu_l < m$ (в случае $m \leqq \nu_l$ оценки лишь упрощаются). Имеем (см. (4) и 14))

$$|\operatorname{Im} f_\eta^{(l)}(e^{i\varphi})| \leqq \sum_{k=\nu_l}^{\infty} \frac{\omega_k}{n_{k+1}} |\sin(n_{k+1}s\varphi)| J_{n_{k+1}}(\varphi) \leqq s\varphi \sum_{k=\nu_l}^{m-1} n_{k+1}\omega_k +$$
$$+ \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\omega_k}{n_{k+1}} J_{n_{k+1}}(\varphi) \leqq 2s\varphi n_m + \left(\frac{\pi}{\varphi}\right)^{2s} \sum_{k=m}^{\infty} n_{k+1}^{-2s} \leqq 2(1+s\pi).$$

Итак,

(15) $$|\operatorname{Im} f_\eta^{(l)}(e^{i\varphi})| \leqq 2(1+s\pi), \quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi;$$

подчеркнем, что постоянная в правой части не зависит от η.

Теперь оценим $\operatorname{Re} f_\eta^{(l)}(e^{i\varphi})$, предполагая выполненным условие (14). Имеем

$$\operatorname{Re} f_\eta^{(l)}(e^{i\varphi}) = \sum_{k=\nu_l}^{\infty} (-1)^{\tau_k} \frac{\omega_k}{n_{k+1}} \cos(n_{k+1}s\varphi) J_{n_{k+1}}(\varphi) = \sum_{k=\nu_l}^{m-1} + \sum_{k=m}^{\infty} \equiv \sigma_1(\varphi) + \sigma_2(\varphi).$$

В силу (4) и (14),

$$|\sigma_2(\varphi)| \leqq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\omega_k}{n_{k+1}} J_{n_{k+1}}(\varphi) \leqq \left(\frac{\pi}{\varphi}\right)^{2s} \sum_{k=m}^{\infty} \omega_k n_{k+1}^{-2s} \leqq 2 \sup_{k \geqq m} \omega_k.$$

Далее, воспользовавшись легко проверяемым неравенством $|\cos(ns\varphi)J_n(\varphi)-n|\leq sn^2\varphi(4+n\varphi)$, $0\leq\varphi\leq\pi$, получим $|\sigma_1(\varphi)-\Sigma_{k=\nu_e}^{m-1}(-1)^{\tau k}\omega_k|\leq 8s\varphi\Sigma_{k=1}^{m-1}n_{k+1}\,\omega_k$. Таким образом, для $\varphi\in(\pi/n_{m+1},\ \pi/n_m]$ $(m\geq 1)$

$$(16)\qquad |\operatorname{Re} f_\eta^{(l)}(e^{i\varphi})-\sum_{k=\nu_l}^{m-1}(-1)^{\tau_k}\omega_k|\leq 8s\varphi\sum_{k=1}^{m-1}n_{k+1}\,\omega_k+2\sup_{k\geq m}\omega_k.$$

(если $m\leq\nu_l$, то сумму в левой части считаем равной нулю).

Учитывая условия (4), (8), (10), (11) и (14), и нечетность l, из неравенства (16) легко вывести следующие свойства функции $f_\eta^{(l)}(e^{i\varphi})$.

Свойство 1. При любом нечетном $l\geq 1$ и любом $\eta\geq 1$ для всех $\varphi\in(0,2\pi)$ $-A<\operatorname{Re} f_\eta^{(l)}(e^{i\varphi})<2\eta+A$, где $A=20\pi s$.

Свойство 2. Для каждого натурального числа N найдется такое $K_N=K_N(\eta)$, что при всех $j>\max(K_N, l)$ $\nu_j-\nu_{j-1}>N$ и

$$|\operatorname{Re} f_\eta^{(l)}(e^{i\varphi})-\eta[1+(-1)^j]|<1$$

для всех значений $\varphi\in(\pi/n_{\nu_j},\ \pi/n_{\nu_{j-N}}]$.

Теперь оценим наилучшие приближения функции $f_\eta^{(l)}(e^{i\varphi})$ в L^p. Напомним, что $J_n^*(e^{i\varphi})$ — полином степени $(2n-1)s$. Пусть, например, $0<p\leq 1$. Тогда для $n_k\leq n<n_{k+1}$, в силу (12), (7), (5) и (6), имеем

$$E_{2ns}(f_\eta^{(l)})_p\leq\|\sum_{m=k}^{\infty}(-1)^{\tau_m}\frac{\omega_m}{n_{m+1}}J^*_{n_{m+1}}(e^{i\varphi})\|_p\leq\{\sum_{m=k}^{\infty}\frac{\omega_m^p}{n_{m+1}^p}\|J^*_{n_{m+1}}\|_p^p\}^{1/p}$$

$$\leq C_{p,s}\{\sum_{m=k}^{\infty}\frac{\omega_m^p}{n_{m+1}}\}^{1/p}\leq C_{p,s}\{\sum_{m=k}^{\infty}\mu_m^p\}^{1/p}\leq C'_{p,s}\mu_k\leq C'_{p,s}\lambda_{2(n+1)s}.$$

Отсюда

$$(17)\qquad E_n(f_\eta^{(l)})_p\leq C'_{p,s}\lambda_n,\quad n=1,2,\ldots$$

В случае $1<p<\infty$ к этому же результату придем аналогично, применяя неравенство Гёльдера.

Перейдем к построению искомой функции $f(re^{i\varphi})$.

Расположим рациональные точки отрезка $[0,2\pi]$ в последовательность $\{\rho_k\}_{k=0}^{\infty}$ $(\rho_0=0)$. Обозначим $\alpha_k=\min\{|\rho_k-\rho_j|:0\leq j\leq k-1\}$, $k\geq 1$. Применяя индукцию, построим три числовые последовательности — убывающую последовательность $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$, $0<\varphi_j<\alpha_j/2$, последовательность $\{\sigma_j\}_{j=0}^{\infty}$ с $\sigma_0=1$ и $|\sigma_j|=1$ и последовательность нечетных индексов $\{l_j\}_{j=0}^{\infty}$ с $l_0=1$ так, чтобы для граничных значений функций

$$f_j(re^{i\varphi})=f_{2^j}^{(l_j)}(re^{i(\varphi-\rho_j)})$$

выполнялись следующие условия $(j=1,2,\ldots)$:

(18) колебание функции $T_{j-1}(\varphi)=\sum_{k=1}^{j-1}\sigma_k 2^{-k}f_k(e^{i\varphi})$ на интервале $|\varphi-\rho_j|<\varphi_j$ меньше 2^{-j}. Если $\operatorname{Re} T_{j-1}(\rho_j)\geq 0$, то $\sigma_j=-1$; в противном случае $\sigma_j=1$.

(19) $$|f_j(e^{i\varphi})|<A=20s\pi \quad \text{при} \quad \varphi_j\leq|\varphi-\rho_j|\leq\pi;$$

(20) $$\int_{-\pi}^{\pi}|f_j(e^{i\varphi})|d\varphi<\varphi_j;$$

(21) $$-A<\operatorname{Re} f_j(e^{i\varphi})<2^{j+1}+A \quad \text{при} \quad 0<|\varphi-\rho_j|\leq\pi.$$

Это можно сделать в силу следующих обстоятельств. Во-первых, при $r=1$ ряд (13) равномерно сходится на любом отрезке, внутреннем к $(0, 2\pi)$. Стало быть, на j-ом шаге можно сначала выбрать φ_j так, чтобы удовлетворялось условие (18), а затем подобрать такое l_j, чтобы выполнялось (19). Во-вторых (см. (12)),

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f_\eta^{(l)}(e^{i\varphi})|\,d\varphi\leq\sum_{k=\nu_l}^{\infty}\frac{\omega_k}{n_{k+1}}\|J^*_{n_{k+1}}\|_1\leq C_1\sum_{k=\nu_l}^{\infty}\frac{\omega_k}{n_{k+1}}\leq\frac{C_1}{n_{\nu_l}};$$

поэтому l_j можно взять настолько большим, чтобы имело место и (20). Условие (21) будет выполняться в силу свойства 1 функций $f_\eta^{(l)}(e^{i\varphi})$.

Заметим, что функции $T_j(\varphi)$ существенно ограничены одной и той же постоянной на $[0, 2\pi]$. Действительно, в силу (15), $|\operatorname{Im} T_j(\varphi)|\leq4(1+s\pi)$. Кроме того, используя свойства (18), (19) и (21) и применяя индукцию, нетрудно показать, что всюду на $(0, 2\pi)$, за исключением точек $\rho_0, \ldots, \rho_j$,

$$|\operatorname{Re} T_j(\varphi)|\leq2+A\left(1+\cdots+\frac{1}{2^{j-1}}\right),\ j=1, 2, \ldots$$

Теперь рассмотрим ряд

(22) $$\sum_{j=0}^{\infty}\sigma_j 2^{-j}f_j(re^{i\varphi}),\quad 0\leq r\leq1.$$

Частные суммы $S_j(re^{i\varphi})$ этого ряда суть ограниченные в единичном круге аналитические функции, причем для почти всех $\varphi\in[0, 2\pi]$ граничные значения функций $S_j(re^{i\varphi})$ совпадают с $T_j(\varphi)$. Поскольку $T_j(\varphi)$ существенно ограничены в совокупности, то и $S_j(re^{i\varphi})$ ограничены в совокупности в единичном круге. Кроме того, ряд (22) при $r=1$ сходится в $L[0, 2\pi]$ (см. (20)) к некоторой функции $g(\varphi)$. Применяя теорему Хинчина (см. [5, 118]), получим, что ряд (22) равномерно сходится внутри единичного круга к ограниченной аналитической функции $f(re^{i\varphi})$, граничные значения которой $f(e^{i\varphi})$ для почти всех φ совпадают с $g(\varphi)$.

Оценим наилучшие приближения в L^p функции $f(e^{i\varphi})$. При $r=1$ ряд (22) сходится в L, а его частные суммы $T_j(\varphi)$ равномерно ограничены; стало быть, этот ряд сходится к $f(e^{i\varphi})$ и в L^p. В силу (17) при любом $k\geq1$ имеем (в случае $1\leq p<\infty$)

$$E_n(T_k)_p\leq\sum_{j=0}^{k}2^{-j}E_n(f_j)_p\leq2B_p\lambda_n.$$

Следовательно, $E_n(f)_p\leq2B_p\lambda_n$. Аналогичную оценку получим и при $0<p<1$.

Покажем теперь, что действительная часть $u(\varphi)=\operatorname{Re} f(e^{i\varphi})$ существенно разрывна при всех φ — и теорема будет полностью доказана.

Фиксируем натуральное число k и рассмотрим средние Стеклова

$$I(h)=\frac{1}{2h}\int_{\rho_k-h}^{\rho_k+h}u(\varphi)d\varphi.$$

Полагая $u_j(\varphi)=\operatorname{Re} f_j(e^{i\varphi})$ и $P_j(\varphi)=\operatorname{Re} T_j(\varphi)$, имеем

$$I(h)=\frac{1}{2h}\int_{\rho_k-h}^{\rho_k+h} P_{k-1}(\varphi)d\varphi+\frac{\sigma_k}{2^{k+1}h}\int_{\rho_k-h}^{\rho_k+h} u_k(\varphi)\,d\varphi$$

$$+\frac{1}{2h}\int_{\rho_k-h}^{\rho_k+h}\Big(\sum_{j=k+1}^{\infty}\sigma_j 2^{-j}u_j(\varphi)\Big)d\varphi=I_1(h)+I_2(h)+I_3(h).$$

Поскольку функция $P_{k-1}(\varphi)$ непрерывна в точке $\varphi=\rho_k$, то $I_1(h)$ имеет конечный предел при $h\to 0$. Далее, оценим $I_3(h)$. Пусть $j>k$; тогда, в силу (19), (20) и условия $\alpha_j>2\varphi_j$,

$$\frac{1}{2h}\int_{\rho_k-h}^{\rho_k+h}|u_j(\varphi)|d\varphi<A,\ 0<h\leqq\pi.$$

Следовательно, $I_3(h)\leqq A2^{-k}$. Выберем натуральное число N так, чтобы было $2^N>2^{k+1}+A$. В силу свойства 2 функций $f_\eta^{(l)}(e^{i\varphi})$, найдется такое K_N, что при всех $m>\max(K_N, l)\,\nu_m-\nu_{m-1}>N$ и

$$|u_k(\varphi)-2^k[1+(-1)^m]|<1 \tag{23}$$

для всех значений $\varphi\in(\pi/n_{\nu_m}, \pi/n_{\nu_m-N}]$ (напомним, что $\{\nu_m\}$ зависит от η; в данном случае $\eta=2^k$). Положим $h_m=\pi/n_{\nu_m-N}$, $\tilde h_m=\pi/n_{\nu_m}$. Тогда (см. (4)) $h_m\geqq(2^{k+1}+A)\tilde h_m$. Если m — нечетное, то в силу (23) и (21),

$$\frac{1}{2h_m}\int_{\rho_k-h}^{\rho_k+h}u_k(\varphi)d\varphi=\frac{1}{2h_m}\Big(\int_{\tilde h_m\leqq|\varphi-\rho_k|\leqq h_m}u_k(\varphi)d\varphi-\int_{\rho_k-\tilde h_m}^{\rho_k+\tilde h_m}u_k(\varphi)d\varphi\Big)$$

$$\geqq\frac{1}{2h_m}[(2^{k+1}-2)h_m-(2^{k+1}+A)2\tilde h_m]\geqq 2^k-2.$$

Стало быть, $|I_2(h_m)|\geqq 1-2^{1-k}$ при нечетном m. Аналогично, если m — четное, то $|I_2(h_m)|<2^{1-k}$. Поэтому найдется такое k_0, что при $k\geqq k_0$ для всех достаточно больших μ будет

$$|I(h_{2\mu+1})-I(h_{2\mu})|\geqq\frac{1}{2}\quad(\mu\geqq\mu_0(k)).$$

Отсюда следует, что в любой окрестности точки ρ_k существенное колебание функции $u(\varphi)$ не меньше $1/2$. Поскольку это справедливо для любой точки ρ_k ($k\geqq k_0$), то функция $u(\varphi)$ существенно разрывна всюду на $[0, 2\pi]$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Конюшков. Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье. *Мат. сборник*, **44**, 1958, № 1, 53—84.
2. В. И. Коляда. Теоремы вложения и неравенства разных метрик для наилучших приближений. *Мат. сборник*, **102**, 1977, № 2, 195—215.
3. В. И. Коляда. О существенной непрерывности суммируемых функций. *Мат. сборник*, **108**, 1979, № 3, 326—349.
4. С. М. Никольский. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. Москва, 1969.
5. И. И. Привалов. Граничные свойства аналитических функций. Москва, 1950,

Одесский государственный университет
270000 Одесса СССР

Получено 3 июня 1981 г.