КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ '81
София, 1983 с. 99—105

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
Sofia, 1983, p. 99—105

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СПЛАЙНОВ

А. А. Лигун

Резюме. С помощью теорем сравнения перестановок функций устанавливается одно неравенство типа Колмогорова, из которого выводятся некоторые неравенства типа Бернштейна для тригонометрических полиномов, сплайн-функций минимального дефекта и совершенных сплайнов.

С помощью теоремы о сравнении перестановок совершенных сплайнов доказывается, что для класса W^r_∞ среди всех квадратурных формул вида

$$\int_0^{2\pi} x(t)dt=\sum_{k=1}^{n} P_k x^{\nu_k}(t_k)+R_n(x),$$

где $0\leqq t_1\leqq t_2\leqq \ldots \leqq 2\pi$, $0\leqq\nu_k\leqq r-1$, наилучшей является формула прямоугольников.

Доказывается, что оптимальным методом восстановления класса W^r_p в метрике пространства L_1 по значениям функций и их производных до порядка ρ в точках $2k\pi/n$ $(k=\overline{1,n})$ является $(\rho+1)$-кратно интерполяционный сплайн минимального дефекта.

Решается одна задача об асимптотически оптимальном выборе узлов при приближении дифференцируемых функций сплайнами. Дается приложение этой задачи к отысканию асимптотически оптимальных на классах $W^{r[0,1]}_p$ весовых квадратурных формул.

1. Обозначим через $L^r_p(r=0,1,2,\ldots,p\in[1,\infty]$, $L^0_p=L_p)$ множество всех 2π-периодических функций $x(t)$, у которых $(r-1)$-я производная $x^{(r-1)}(t)$ $(x^{(0)}(t)=x(t))$ локально-абсолютно непрерывна на всей оси и $x^{(r)}\in L_p$, и положим $W^r_p=\{x: x\in L^r_p, \| x^{(r)}\|_p\leqq 1\}$. Через $C^r(r=0,\ 1,\ldots)$ обозначим множество всех r раз непрерывно дифференцируемых на всей оси 2π-периодических функций.

Как обычно, через $S_r(\Delta_N)$ обозначим множество всех сплайн-функций порядка r дефекта 1 по разбиению Δ_N, $\Delta_N=\{0\leqq t_1<t_2<\ldots<t_N<t_1+2\pi=t_{N+1}\}$, т. е. множество всех функций $S\in C^{r-1}$, совпадающих на каждом из интервалов $]t_k,\ t_{k+1}[$ $(k=\overline{1,N})$ с алгебраическим многочленом степени не выше, чем r. В случае, когда $t_k=k\pi n^{-1}$ $(k=\overline{1,2n})$, мы будем писать $S_{r,n}$ вместо $S_r(\Delta_{2n})$.

Через $M_{r,n}(n, r=1,2,\ldots)$ обозначим множество всех 2π-периодических совершенных сплайнов порядка r с $2n$ узлами, т. е. множество всех функций $x\in L^r_\infty$, у которых $|x^{(r)}(t)|=1$ почти всюду на $[0,2\pi]$ и $\nu(x^{(r)})\leqq 2n$. Здесь и далее $\nu(x)$ — число перемен знака 2π-периодической функции x на периоде.

2. Одной из основных задач теории механических квадратур является следующая задача, общая постановка которой принадлежит А. Н. Колмогорову. Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторый класс функций и $\mathfrak{N}_n$ — некоторый набор квадратурных формул вида

$$\int_0^{2\pi} x(t)dt = \sum_{k=1}^{n} p_k x^{(\mu_k)}(t_k) + R(x) \quad (0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n \leq 2\pi). \tag{1}$$

Требуется среди всех квадратурных формул из набора $\mathfrak{N}_n$ найти ту, у которой величина $\sup\{R(f) : f \in \mathfrak{M}\}$ наименьшая.

В случае, когда $\mathfrak{M}$ — класс r раз дифференцируемых функций и r мало, эта задача рассматривалась во многих работах (см., например, [1—4]). В случае, когда $\mu_k = 0$ или 1, для важных классов дифференцируемых функций эта задача решена в работах [5—7]. Недавно для классов W_p^r при всех ρ, $1 \leq \rho \leq r$, задача о наилучшей квадратурной формуле вида

$$\int_0^{2\pi} x(t)dt = \sum_{k=1}^{N} \sum_{\mu=0}^{\rho-1} p_{k\mu} x^{(\mu)}(t_k) + R(x)$$

решена в работе Боянова [8]. В работе автора [9] установлено, что среди всех квадратурных формул вида (1), у которых $0 \leq \mu_k \leq r-1$ (если некоторые из μ_k больше, чем $r-1$, то на всем классе W_p^r квадратурная формула (1) не имеет смысла), наилучшей для класса W_1^r является единственная (с точностью до сдвига) формула прямоугольников

$$\int_0^{2\pi} x(t)dt = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} x\left(\frac{2k\pi}{n} + \gamma\right) + R_n^*(x). \tag{2}$$

Следующее утверждение устанавливает аналогичный факт для классов W_∞^r.

Теорема 1. *Пусть n, $r = 1, 2, \ldots$ Тогда среди всех квадратурных формул вида* (1) *для класса W_∞^r наилучшей является формула прямоугольников* (2). *Наилучшая квадратурная формула единственна с точностью до сдвига.*

В основе доказательства теоремы 1 лежат следующие два утверждения. В случае, когда совершенный сплайн $x(t)$ имеет $2n$ локальных экстремумов на периоде, первое из этих утверждений доказано Моторным [5] для $p=1$ и ∞ и автором [10] для $p \in]1, \infty[$, и при доказательстве его в основном мы следуем схеме рассуждений В. П. Моторного.

Теорема 2. *Пусть n, $r = 1, 2, \ldots$ и $p \in [1, \infty]$. Тогда для любого неотрицательного на всей оси совершенного сплайна $x \in M_{r,n}$, $x(t) \not\equiv a + \varphi_r(nt+\gamma)$ выполняется неравенство $\|x\|_p > n^{-r} \|\varphi_r + \|\varphi_r\|_\infty\|_p$.*

Здесь и далее $\varphi_r(t)$ есть r-й периодический интеграл, в среднем равный нулю на периоде от функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sign} \sin nt$.

Теорема 3. *Для любых точек $\{t_k\}_{k=1}^n$ и чисел $\mu_k (0 \leq \mu_k \leq r-1)$ найдется совершенный сплайн $x \in M_{r,N} (N \leq n)$ такой, что $x^{(\mu_k)}(t_k) = 0 (k = \overline{1, n})$* и $x(t) \geq 0$ $(t \in [0, 2\pi])$.

При $\mu_k = 0$ $(k = \overline{1, n})$ это утверждение доказано Моторным [5].

3. Пусть, как обычно,

$$E(x, \mathfrak{N})_p = \inf \{\| x-u \|_p : u \in \mathfrak{N}\},$$
$$E(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})_p = \sup \{E(x, \mathfrak{N})_p : x \in \mathfrak{N}\}$$

и $d_n(\mathfrak{M})_p = \inf\{E(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}_n)_p : \mathfrak{N}_n \in L_p, \dim \mathfrak{N}_n = n\}$ — n-поперечник Колмогорова класса $\mathfrak{M}$ в пространстве L_p. Положим $W_p^{r,+} = \{x : x \in L_p^r, \|(x^{(r)})_+\|_p \leq 1\}$, где $x_+(t) = \max\{x(t), 0\}$.

В работе автора и Доронина [11] установлено, что при $n, r = 1, 2 \ldots$ и $p \in [1, \infty]$ $d_{2n-1}(W_p^{r,+})_1 = n^{-r} \| \varphi_r + \| \varphi_r \|_\infty \|_{p'}$ $(1/p + 1/p' = 1)$.

Используя теорему 2, нетрудно получить следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть n, $r = 1, 2, \ldots$ и $p \in [1, \infty]$. Тогда $d_{2n}(W_p^{r,+})_1 = d_{2n-1}(W_p^{r,+})_1 = n^{-r} \| \varphi_r + \|\varphi_r\|_\infty \|_{p'}$.*

4. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть $r = 1, 2, \ldots, k = \overline{0, r-1}$, $p \in [1, \infty]$ и L_v^r — множество всех 2π-периодических функций $x(t)$, у которых $(r-1)$-я производная $x^{(r-1)}(t)$ локально абсолютно непрерывна на всей оси и r-я имеет ограниченную вариацию. Тогда для любой функции $x \in L_v^r$ выполняется точное на L_v^r неравенство*

$$\frac{\bigvee_0^{2\pi} (x^{(k)})}{\|\varphi_{r-k}\|_\infty} \leq \left(\frac{\nu(x')}{2}\right)^{\alpha/p'} \left(\frac{4 \| x \|_p}{\| \varphi_r \|_p}\right)^{\alpha} \left(\bigvee_0^{2\pi} (x^{(r)})\right)^{1-\alpha},$$

где $\alpha = (r-k)/(r+p^{-1})$ и $\nu(x)$ — число перемен знака функции x на периоде.

Из теоремы 5 легко получаются такие следствия.

Следствие 1. *При всех n, $r = 1, 2, \ldots, p \in [1, \infty]$, и любого совершенного сплайна $x \in M_{r,n}$ выполняется неравенство*

(3) $$\| x \|_p \geq n^{-r} \| \varphi_r \|_p.$$

Следствие 2. *При всех n, $r = 1, 2, \ldots$, $k = \overline{0, r}$ и $p \in [1, \infty]$ для любой функции $x \in S_{r,n}$ выполняется точное на $S_{r,n}$ неравенство*

(4) $$\bigvee_0^{2\pi} (x^{(k)}) / \bigvee_0^{2\pi} (\varphi_{r-k}) \leq n^{k+1} \| x \|_p / \| \varphi_r \|_p.$$

Следствие 3. *При всех n, $k = 1, 2, \ldots, p \in [1, \infty]$ для любого тригонометрического полинома x порядка не выше, чем $n-1$ $(x \in T_{n-1})$, выполняется точное на T_{n-1} неравенство*

(5) $$\| x^{(k)} \|_1 / 4 \leq n^k \| x \|_p / \| \cos (\cdot) \|_p.$$

При $p = 1$ и ∞ неравенство (3) установлено ранее в работах [12] и [14], а при $p \in]1, \infty[$ в работе автора [10]. При $p = 1$ неравенство (4) установлено в работе [14], а при $p \in]1, \infty[$ и $k = r$ — в работе автора [15]. Для $p = 1$ (5) есть хорошо известное обобщение неравенства С. Н. Бернштейна, полученное Зигмундом [16]. Зигмунд доказал неравенство

(6) $$\| x^{(k)} \|_p \leq n^k \| x \|_p$$

при всех $p \in [1, \infty[$. Недавно Арестов [17] доказал справедливость неравенства (6) и для $p \in [0, 1]$.

5. Пусть s — произвольное отображение из $R_{\rho n}$ в L_p и $T_\rho(x, \Delta_n)=\{x(t_1), x'(t_1), \ldots, x^{(\rho-1)}(t_1), \ldots, x(t_n), x'(t_n), \ldots, x^{(\rho-1)}(t_n)\}$. Функцию $s(T_\rho(x, \Delta_n), t)=s(x(t_1), \ldots, x^{(\rho-1)}(t_1), \ldots, x(t_n). \ldots, x^{(\rho-1)}(t_n), t)$ называют восстановлением функции x методом s по информации $T_\rho(x, \Delta_n)$, а величину $R_\rho(x, s, \Delta_n)_p=\| x-s(T_\rho(x, \Delta_n)) \|_p$ — погрешностью восстановления функции x методом s по информации $T_\rho(x, \Delta_n)$ в метрике L_p, а величину

$$R(\mathfrak{M}, s, \Delta_n)_p=\sup\{R_\rho(x, s, \Delta_n)_p : x \in \mathfrak{M}\}$$

погрешностью восстановления класса $\mathfrak{M}$ методом s по информации $T_\rho(x, \Delta_n)$ в метрике пространства L_p.

Положим

$$R_\rho(\mathfrak{M}, \Delta_n)_p=\inf\{R_\rho(\mathfrak{M}, s, \Delta_n)_p \mid s : R_{\rho n}\to L_p\}, \tag{7}$$

и метод s^*, реализующий точную нижнюю грань в правой части соотношения (7), назовем ρ-оптимальным методом восстановления класса $\mathfrak{M}$ по разбиению Δ_n в метрике пространства L_p. Разбиение Δ_n^* назовем ρ-оптимальным для класса и метрики L_p, если $R_\rho(\mathfrak{M}\ \Delta_n^*)_p=R_{\rho,n}(\mathfrak{M})_p$, где $R_{\rho,n}(\mathfrak{M})_p =\inf\{R_\rho(\mathfrak{M}, \Delta_n)_p : \Delta_n\}$, а ρ-оптимальный метод восстановления класса $\mathfrak{M}$ в метрике L_p по разбиению Δ_n^* назовем ρ-оптимальным методом восстановления класса $\mathfrak{M}$ в метрике L_p.

Для $\rho=r$, p и $\mathfrak{M}=W_q^r$, $q\in[1,\infty]$ задача о нахождении ρ-оптимального метода восстановления решена Бояновым [18] для $\rho=1, 2, p\in[1, \infty[$ и $\mathfrak{M}=W_\infty^r$ она решена Великиным [19] $(p=1, \infty)$ и автором [10] $(p\in]1, \infty[)$, для $\rho=1$, $p=1$ и $\mathfrak{M}=W_q^r(q\in[1, \infty[)$ — Корнейчуком [20] (оценка сверху) и автором [21] (оценка снизу). Приведем некоторые новые результаты этого направления.

Для четных ρ обозначим через $P_{r,\rho}$ множество всех функций $x(t)$ вида

$$x(t)=-2\,D_r(t)-b_0-\Sigma_{i=1}^{(\rho-2)/2}b_iD_{r-2i}(t),$$

где $D_r(t)$ есть m-й периодический интеграл, в среднем равный нулю на периоде, от функции

$$D_1(t)=\begin{cases}(\pi-t)/2 & (t\in]0, 2\pi[), \\ 0 & (t=0),\end{cases}$$

т. е. $D_r(t)=\Sigma_{k=1}^\infty k^{-r}\cos(kt-\pi r/2)$. При нечетных ρ через $P_{r,\rho}$ обозначим множество всех функций $x(t)$ вида $x(t)=\varphi_r(t)-\Sigma_{i=1}^{(\rho-1)/2} b_i\,\varphi_{r-2i}(t)$.

Пусть $x_{r,\rho,q}\in P_{r,\rho}$ и $\| x_{r,\rho,q} \|_q=\inf\{\| y\|_q : y\in P_{r,\rho}\}$. При любом $q\in[1, \infty[$ функция $x_{r,\rho,q}(t)$ имеет ρ различных нулей на $[0, 2\pi[$ при четных ρ и ρ различных нулей на $[0, 2\pi[$ при нечетных ρ.

Через $\Delta_{n,r,\rho,q}$ обозначим множество всех нулей функции $x_{r,\rho,q}(nt)$ на периоде $[0, 2\pi[$. Разбиение $\Delta_{n,r,\rho,q}$ состоит из ρn точек, если ρ четно, и из $2n\rho$ точек, если ρ нечетно.

Обозначим через $s_{n,r-1,\rho,q}(x,t)$ сплайн из $s_{r-1}(\Delta_{n,r,\rho,q})$, ρ-кратно интерполирующий функцию $x(t)$ в точках $2k\pi n^{-1}$ $(k=\overline{1,n})$, если ρ четно, и в точках $k\pi n^{-1}$ $(k=\overline{1,2n})$, если ρ нечетно, т. е. $s_{n,r-1,\rho,q}(x)\in S_{r-1}(\Delta_{n,r,\rho,q})$ и

$$s_{n,r-1,\rho,q}^{(\mu)}(x,\frac{2k\pi}{n})=x^{(\mu)}(\frac{2k\pi}{n})\ (k=\overline{1,n}\,;\ \mu=\overline{0,\rho-1}\,;\ \rho=2m)$$

и

$$S^{(\mu)}_{n,r-1,\rho,q}\left(x,\frac{k\pi}{n}\right)=x^{(\mu)}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\ \ (k=\overline{1,2n}\,;\ \mu=\overline{0,\rho-1}\,;\ \rho=2m-1).$$

Теорема 6. *Пусть* n, $r=1, 2, \ldots, \rho=\overline{1, r}$ *и* $q\in[1,\infty[$. *Тогда для любой функции* $x\in C^{\rho-1}$ *сплайн* $s_{n,r-1,\rho,q}(x)$ *существует и единствен.*

Пусть $\overline{\Delta}_m=\{2\mu\pi m^{-1}\}_{\mu=1}^{m}$.

Теорема 7. *Пусть* $n, r=1, 2, \ldots, \rho\ \overline{1, r}$, $q\in[1,\infty[$, $1/q+1/q'=1$ и

$$N=\begin{cases} n & (\rho=2m),\\ 2n & (\rho=2m-1).\end{cases}$$

Тогда ρ*-оптимальным методом восстановления класса* W^r_q *по разбиению* $\overline{\Delta}_N$ *в метрике пространства* L_1 *является метод* $s_{n,r-1,\rho q'}(x)$. *При этом*

$R_\rho\,(W^r_q, \overline{\Delta}_N)_1=\sup\{\|x-s_{n,r-1,\rho,q'}(x)\|_1 : x\in W^r_q\}=n^{-r}\|x_{r,\rho,q'}\|_{q'}$,

Отсюда и из результата Боянова [8] получается

Теорема 8. *Пусть* n, $r=1, 2,\ldots, q\in[1,\infty[$, $\rho=2, 4, 6\ldots, \rho\leq r$. *Тогда* ρ*-оптимальным методом восстановления класса* W^r_q *в метрике* L_1 *является метод* $s_{n,r-1,\rho,q'}(x)$. *При этом* $R_{\rho,n}(W^r_q)_1=R_\rho(W^r_q, \overline{\Delta}_n)=n^{-r}\|x_{r,\rho,q'}\|'_q$.

Теорема 9. *Пусть* $n=1, 2,\ldots, r=2, 4, 6, \ldots, \rho=r-1$ *и* $q\in[1,\infty[$. *Тогда* ρ*-оптимальным методом восстановления класса* W^r_q *в метрике* L_1 *является метод* $s_{n,r-1,\rho,q'}(x)$. *При этом* $R_{r-1,2n}(W^r_q)_1=R_{r-1}(W^r_q\ \overline{\Delta}_{2n})=n^{-r}\|x_{r,\rho,q'}\|_{q'}$.

При $q=\infty$ теоремы 7 — 9 получены ранее автором совместно с Василенко [22], а при $\rho=2$ теоремы 7 и 8 получены ранее автором совместно с А. А. Шумейко.

6. Пусть $\omega(x, t)=\sup\{\|x(\cdot+h)-x(\cdot)\|_\infty : |h|\leq t\}$ — модуль непрерывности функции x и $\omega_*(x, t)$ — наименьшая выпуклая вверх мажоранта модуля непрерывности $\omega(x, t)$.

Теорема 10. *Пусть* $p\in[1, \infty]$, $r=0, 1, \ldots$ *и* $\mathfrak{N}$ — *произвольное подпространство пространства* L_p, *содержащее константы. Тогда для любого* $\delta>0$ *выполняются соотношения*

$$\max\left\{\frac{1}{2}E(W^{r,*}_\infty, \mathfrak{N})_p,\ \frac{1}{\delta}E(W^{r+1}_\infty, \mathfrak{N})_p\right\}=\sup\{E(x, \mathfrak{N})_p \tag{8}$$

$$/\,\omega^*(x^{(r)},\delta)\ : x\in C^r\setminus R_1\}$$

$$\leq\sup\{E(x, \mathfrak{N})_p/\,\omega(x^{(r)}, \delta) : x\in C^r\setminus R_1\}\leq 1/2\,E(W^{r,*}_\infty, \mathfrak{N})_p+1/\delta\, E(W^{r+1}_\infty, \mathfrak{N})_p,$$

где $W^{r,*}_p=\{x : x\in L^r_p,\ \ \inf\{\,|x^{(r)}-\lambda\|_p : \lambda\in R_1\}\leq 1\}$.

Аналогичные соотношения установлены также для наилучших односторонних приближений, а также для уклонений линейных методов приближения.

В случае, когда $\mathfrak{N}=T_n$ и $p=1$ или ∞, первое из соотношений (8) доказано Корнейчуком [23].

Следствие 4. *Пусть* $p=1$ *или* ∞, $r=0, 1, \ldots$ *и* $n=1, 2, \ldots$ *Тогда* $\sup\{E(x, S_{n,r})_p/\,\omega_*(x^{(r)}, \delta/n) : x\in C^r\setminus R_1\}=n^{-r}\max\{1/2\|\varphi_r\|_p,\ 1/\delta\|\varphi_{r+1}\|_p\}$.

Первый точный результат, связанный с вычислением констант в неравенствах типа Джексона, получил Н. П. Корнейчук, который показал [24], что $1-1/2n \leq \sup\{E(x, T_{n-1})_p / \omega(x, \pi/n) : x \in C \setminus R_1\} \leq 1$.

В работе Шалаева [25] доказано, что $1-1/2n \leq \sup\{E(x, T_{n-1})_\infty / \omega_2(x, \pi/2n) : x \in C \setminus R_1\} \leq 1$, где $\omega_2(x, t) = \sup\{\| x(\cdot + h/2) - 2x(\cdot) + x(\cdot - h/2)\|_\infty \ |h| < t\}$ — модуль гладкости функции x.

Следующее утверждение является аналогом последнего соотношения для наилучших односторонних приближений. Пусть, как обычно, $E^+(x, \mathfrak{N})_p = \inf\{\| x-u \|_p : x \in \mathfrak{N},\ x(t) \leq u(t) \quad (t \in [0, 2\pi])\}$ — наилучшее приближение сверху функции x множеством $\mathfrak{N}$ в метрике пространства L_p.

Теорема 11. *Для* $n=1, 2, \ldots$ *имеют место соотношения* $2\pi - \pi/n \leq \sup\{E^+(x, S_{r,n})_1 / \omega_2(x, \pi/2n) : x \in C \setminus R_1\} \leq 2\pi$ *и* $2\pi - \pi/n \leq \sup\{E^+(x, T_{n-1})_1 / \omega_2(x, \pi/2n) : x \in C \setminus R_1\} \leq 2\pi$.

7. Обозначим через $S_{r,k}(\Delta_n, [0, 1])$ множество всех сплайн-функций, заданных на отрезке $[0, 1]$, порядка r дефекта k по разбиению $\Delta_n = \{0 \leq t_{0,n} < t_{1,n} < \ldots < t_{n,n} = 1\}$, т. е. $S_{r,k}(\Delta_n, [0, 1])$ есть множество всех функций $x \in C^{r-k}_{[0,1]}$, совпадающих на каждом из интервалов $]t_{i-1,n}, t_{i,n}[$ $(i=\overline{1,n})$ с алгебраическим многочленом степени не выше, чем r.

Положим $\mathscr{E}_{n,r,k}(x)_{p[0,1]} = \inf\{E(x, S_{r,k}(\Delta_n, \overline{[0, 1]}))_{p[0,1]} : \Delta_n\}$. Имеет место

Теорема 12. *Пусть* $r=1, 2, \ldots, k=\overline{1,r+1}$ *и* $p \in [1, \infty]$. *Тогда для любой функции* $x \in C^{r[0,1]}$ *при* $n \to \infty$

$$\mathscr{E}_{n,r,k}(x)_{p[0,1]} = \frac{\| x_{r+1,\ 2[\frac{k+1}{2}],\ p} \|_p}{(2\pi n)^{r+1}} \left(\int_0^1 | x^{(r+1)}(t) |^{\frac{1}{r+1+p^{-1}}} dt\right)^{r+1+p^{-1}} (1+o(1)),$$

где $[\alpha]$ — *целая часть числа* α *и* $x_{n,\rho,p}(t)$ — *функция, определенная в п. 5.*

Для сплайнов максимального дефекта, а также для $k=2$, $p=1$ эта задача ранее решена в работах [26] и [27] соответственно. В общем случае этот результат получен автором совместно с А. А. Шумейко.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Никольский. Квадратурные формулы. Москва, 1974.
2. В. И. Крылов. Приближенное вычисление интегралов. Москва, 1967.
3. Н. П. Корнейчук, Н. Е. Лушпай. Наилучшие квадратурные формулы для классов дифференцируемых функций и кусочно-полиномиальные приближения. *Изв. АН СССР, Сер. матем.*, **33**, 1969, № 6, 1416 — 1434.
4. Н. Е. Лушпай. Наилучшие квадратурные формулы для классов дифференцируемых функций. *Мат. заметки*, **14**, 1969, № 6, 475 — 481.
5. В. П. Моторный. О наилучшей квадратурной формуле вида $\sum_{k=1}^{n} P_k f(x_k)$ для некоторых классов периодических дифференцируемых функций. *Изв. АН СССР, Сер. матем.*, **38**, 1974, 583—614.
6. А. А. Лигун. Точные неравенства для сплайн-функций и наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций. *Мат. заметки*. **16**, 1976, № 6, 913—926.
7. А. А. Женсыкбаев. О наилучшей крадратурной формуле для классов $W^r L_p$. *Докл. АН СССР*, **227**, 1976, № 2, 277 — 279.
8. B. D. Boyanov. Uniqueness of optimal nodes of quadrature formulas. *C. R. Acad Bulg. Sci.*, **33**, 1980, № 2, 167—169.
9. А. А Лигун. О наилучших квадратурных формулах для некоторых классов периодических функций. *Мат. заметки*, **24**, 1978, № 5, 661—669.

10. A. A. Ligun. Optimal methods for the approximate calculation of functionals on class W^r_∞. *Analysis math.*, **5**, 1979, No 4, 269—286.
11. В. Г. Доронин, А. А. Лигун. О поперечниках одного класса периодических функций. — В: Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. Днепропетровск, 1977, 12—17.
12. В. М. Тихомиров. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений. *Успехи мат. наук*, **15**, 1960, № 3, 81—120.
13. В. М. Тихомиров. Наилучшие методы приближения и интерполирования функций в пространстве $C_{[-1,1]}$. *Матем. сб.*, **80**, 1969, № 2, 290—304.
14. Ю. Н. Субботин. Приближение сплайн-функциями и оценки поперечников. *Тр. матем. ин-та АН СССР*, **109**, 1971, 35—60.
15. А. А. Лигун. Об одном неравенстве для сплайн-функций минимального дефекта. *Мат. заметки*, **24**, 1978, № 4, 547—552.
16. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды. 1965.
17. В. В. Арестов. Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных. *Изв. АН СССР, Сер. матем.*, **45**, 1981, № 1, 3—22.
18. Б. Д. Боянов. Наилучшие методы интерполирования для некоторых классов дифференцируемых функций. *Мат. заметки*, **17**, 1975, № 4, 511—524.
19. В. Л. Великин. Оптимальная интерполяция периодических дифференцируемых функций с ограниченной старшей производной. *Мат. заметки*, **22**, 1977, № 5, 663 — 669.
20. N. P. Korneičuk. Exact error of bound for approximation by interpolating splines in L-metric on the class $W^r_p\,(1 \leq p < \infty)$ of periodic functions. *Analysis math.*, **3**, 1977, No 2, 109—117.
21. А. А. Лигун. О поперечниках некоторых классов дифференцируемых периодических функций. *Мат. заметки*, **27**, 1980 № 1, 61—74.
22. В. А. Василенко, А. А. Лигун. Оптимальное восстановление дифференцируемых периодических функций в интегральной метрике (в печати).
23. Н. П. Корнейчук. Замечание к теореме Джексона для дифференцируемых функций. *Мат. заметки*, **12**, 1972, № 5, 517—522.
24. Н. П. Корнейчук. О наилучшем равномерном приближении непрерывных функций. *Доклады АН СССР*, **141**, 1961, 304—307.
25. В. В. Шалаев. К вопросу о приближении непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами.—В : Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. Днепропетровск, 1977, 39—43.
26. А. А. Лигун, В. Ф. Сторчай. О наилучшем выборе узлов при приближении сплайнами в метрике L_p. *Мат. заметки*, **20**, 1976, № 4, 611—618.
27. А А. Лигун, А. Д. Малышева. Об оптимальном выборе узлов при наилучшем приближении функций сплайнами. — В : Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. Днепропетровск, 1980, 31 — 35.

Пр. Металлургов 8/28
322639 Днепродзерджинск *СССР*

Получено 4 июня 1981 г.