КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ '81
*София, 1983, с. 106—110*

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
*Sofia, 1983, p. 106—110*

# О СВОЙСТВАХ ФУНКЦИЙ, ВЫТЕКАЮЩИХ ИЗ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ПОЛЮСОВ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

**К. Н. Лунгу**

***Резюме.*** Рассматривается вопрос о свойствах аппроксимируемой вещественнозначной функции $f$, непрерывной на отрезке $\Delta=[-1, 1]$, вытекающих из асимптотического поведения таблицы полюсов $\alpha=\{\alpha_{n,k}\}$ последовательности $\{r_n^0\}$, $n\in\mathbf{N}$, рациональных функций наилучшего приближения в смысле Чебышева на отрезке $\Delta$. Пусть $L=\{\alpha_{n,k}\}'$ — множество предельных точек таблицы $\alpha$. Показано, что если множество $L$ состоит из конечного числа точек, каждая из которых является пределом этой таблицы, то $f$ — однозначная аналитическая функция вне множества $L$. Далее, если таблица $\alpha$ обладает „сгустком", то $f$ — однозначная аналитическая функция в компоненте дополнения к множеству $L$, содержащей отрезок $\Delta$.

**1.** Пусть $f$ — вещественнозначная функция, определенная и непрерывная на отрезке $\Delta=[-1,1]$. Через $\mathscr{R}_n$ обозначим совокупность всех рациональных функций с действительными коэффициентами, порядок которых не выше, чем $n$, а через $r_n^0$ — рациональную функцию класса $\mathscr{R}_n$, доставляющую функции $f$ наилучшее приближение в равномерной метрике на отрезке $\Delta$. Множество полюсов рациональной функции $r_n^0$ будем обозначать через $\alpha_n=\{\alpha_{n,1}, \ldots, \alpha_{n,m_n}\}$, $m_n\leqq n$ (здесь и далее каждый полюс выписывается столько раз, какова его кратность), Через $L=\{\alpha_{n,k}\}'$ обозначим множество предельных точек последовательности $\{\alpha_n\}$, $n\in\mathbf{N}$, а через $l$ — множество всех пределов этой последовательности. Будем предполагать, что $L\cap\Delta=\varnothing$.

Теорема 1. *Предположим, что $L=l$ — конечное множество. Тогда $f$ — функция, голоморфная (однозначная аналитическая) в области $\overline{\mathbf{C}}\setminus L$.*

Пусть $D$ обозначает компоненту дополнения к множеству $L$ (до расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$), содержащую отрезок $\Delta$. Через $\tau_n(a, \varepsilon)$ будем обозначать число точек множества $\alpha_n$, принадлежащих $\varepsilon$ — окрестности точки $a$. Положим

$$\tau(a, \varepsilon)=\varlimsup_{n\to\infty}\tau_n(a, \varepsilon)/n, \qquad \tau(a)=\inf_{\varepsilon>0}\tau(a, \varepsilon).$$

Теорема 2. *Предположим, что существует точка $a \in L$ такая, что $\tau(a) > 0$. Тогда $f$ — функция, голоморфная в области $D$.*

Из сформулированных теорем немедленно вытекает следующее

Следствие. *Если множество $L$ состоит из одной точки, $L=\{a\}$, то $f$ — целая трансцендентная функция аргумента $1/(z-a)$.*

В заключение отметим, что аналогичная задача, относящаяся к аппроксимациям Паде, рассмотрена ранее в работе [1], где получены более общие результаты. Некоторые дополнения и замечания к теоремам 1 и 2 и еще одна постановка приведены ниже в п. 4.

**2**. В этом пункте получим одну формулу, необходимую для дальнейшего. Через $\Lambda=\{n_k\}$ будем обозначать подмножество всех натуральных чисел, таких, что для каждого $n \in \Lambda$ рациональная функция $r_n^0$ имеет порядок (число полюсов, с учетом кратности, в $\bar{\mathbf{C}}$), в точности равный $n$, т. е. $m_n=n$. $\Lambda$ называется множеством нормальных индексов последовательности $\{r_n^0\}$, $n \in \mathbf{N}$.

Из теоремы Чебышева ([2, с. 66]) следует, что разность $f(z)-r_{n_k}^0(z)$ обладает $N_k+1=n_k+n_{k+1}+1$ точечным альтернансом на отрезке $\Delta$. Следовательно, рациональная функция

$$r_{N_k}(z)=r_{n_{k+1}}^0(z)-r_{n_k}^0(z),$$

порядок которой не выше, чем $N_k$, имеет на отрезке $\Delta$ (точнее в интервале $(-1, 1)$) ровно $N_k$ простых нулей. Положим $r_n^0=p_n^0/q_n^0$ и будем предполагать, что старший коэффициент полинома $q_n^0$ равен единице.

Имеем

$$r_{N_k}(z)=\mathscr{A}\,.\,\omega_{N_k}(z)/q_{n_k}^0(z)q_{n_{k+1}}^0(z), \tag{1}$$

где

$$\mathscr{A}\,.\,\omega_{N_k}(z)=(p_{h_{k+1}}^0 q_{n_k}^0-p_{n_k}^0 q_{n_{k+1}}^0)(z)=\mathscr{A}(z^{N_k}+\ldots). \tag{2}$$

Пусть $a_k$ означает некоторый полюс функции $r_{n_k}^0$ ($a_k$ — какая-либо точка множества $\alpha_{n_k}=\{\alpha_{n_k,j}\}_{j=1}^{n_k}$). Положим в (2) $z=a_k$, находим $\mathscr{A}$ и его значение подставим в (1). Получаем требуемую формулу

$$r_{N_k}(z)=-\frac{p_{n_k}^0\cdot q_{n_k}^0}{\omega_{N_k}}(a_k)\frac{\omega_{N_k}}{q_{n_k}^0 q_{n_{k+1}}^0}(z). \tag{3}$$

Из формулы (3) следует, в частности, что рациональные функции $r_{n_k}^0$ и $r_{n_{k+1}}^0$ не могут иметь общего полюса, а также общего нуля вне отрезка $\Delta$.

**3.** Переходим к доказательству сформулированных теорем. Докажем сначала теорему 1. Рассмотрим ряд из рациональных функций

$$r_{n_{k'}}^0(z)+\sum_{k=k'}^{+\infty} r_{N_k}(z), \tag{4}$$

где число $k'$ будет фиксировано ниже.

Сходимость ряда (4) эквивалентна сходимости последовательности $\{r_n^0\}$, $n \in \Lambda$, $n \geq n_{k'}$. Покажем, что в условиях теоремы 1 ряд (4) сходится равномерно внутри области $\bar{\mathbf{C}} \setminus l$ $(l = L)$.

Пусть $l = \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$. Не ограничивая общности, можно считать, что множество $l$ не содержит бесконечно удаленной точки (рассматриваемая задача инвариантна относительно дробнолинейных преобразований комплексной плоскости $z$, сохраняющих отрезок $\Delta$). Фиксируем произвольный компакт $E \subset \bar{\mathbf{C}} \setminus l$, содержащий отрезок $\Delta$ и произвольное число $\varepsilon, 0 < \varepsilon < d = d(E, l)$, ($d(E, l)$ — расстояние между $E$ и $l$). Число $k'$ (фигурирующее в (4)) выберем так, чтобы при всех $n \geq n_{k'}$, $n \in \Lambda$ множества $\alpha_n$ принадлежали $\varepsilon$-окрестности множества $l$. Из условия теоремы 1 следует, что для каждого $k \geq k'$ найдется точка $z_j = z_{j(k)} \in l$, такая, что в $\varepsilon$-окрестности этой точки имеется хотя бы одна точка множества $\alpha_n$ и не меньше, чем $[n_{k+1}/m]$ точек множества $\alpha_{n_{k+1}}$ ($[n_{k+1}/m]$ — целая часть числа $n_{k+1}/m$). Воспользуемся формулой (3), где в качестве точки $a_k$ берем точку множества $\alpha_{n_k}$, ближайшую к точке $z_j$ (или любую из таких точек, если их несколько).

Имеем ($\| \cdot \|_e$ означает sup-норма на $e$)

$$\| r_{N_k} \|_E \leq |(p_{n_k}^0 q_{n_{k+1}}^0)(a_k)| \, \| \omega_{N_k} \|_E / \omega_{N_k}(a_k) \cdot \min_{z \in E} |(q_{n_k}^0 q_{n_{k+1}}^0)(z)|.$$

К полиному $p_{n_k}^0$ применим лемму Бернштейна — Уолша об оценке роста полиномов (ниже $g_\Delta(z, \infty)$ означает функцию Грина отрезка $\Delta$ с особенностью в бесконечности). Имея в виду определение $r_n^0$, получаем

$$|p_n^0(a_k)| \leq \| p_n^0 \|_\Delta \exp \{n g_\Delta(a_k, \infty)\}$$
$$\leq \| r_n^0 \|_\Delta \cdot \| q_n^0 \|_\Delta \exp \{c_1 g_\Delta(z_j, \infty)\} \leq M c_2^n \| q_n^0 \|_\Delta,$$

где $M = 2 \| f \|_\Delta$ ($\| r_n^0 \|_\Delta \leq \| f - r_n^0 \|_\Delta + \| f \|_\Delta \leq M$) (здесь и далее $c_1, c_2, c_3, \ldots$ обозначают различные постоянные, не зависящие от $n$ и $z$; они могут зависеть лишь от компакта $E$, геометрического расположения точек множества $l$ и числа $d$).

Таким образом, приходим к неравенству

$$\| r_{N_k} \|_E \leq M c_2^{n_k} \frac{\| \omega_{N_k} \|_E}{|\omega_{N_k}(a_k)|} \frac{\| q_{n_k}^0 \|_\Delta}{\min\limits_{z \in E} |q_{n_k}^0(z)|} \frac{|q_{n_{k+1}}^0(a_k)|}{\min\limits_{z \in E} |q_{n_{k+1}}^0(z)|}. \tag{5}$$

Следующие оценки получаются без труда:

$$\| \omega_{N_k} \|_E / |\omega_{N_k}(a_k)| < c_3^{N_k}, \qquad \| q_{n_k}^0 \|_E / \min_{z \in E} |q_{n_k}^0(z)| < c_4^{n_k},$$

$$|q_{n_k}^0(a_k)| \,/ \min_{z \in E} |q_{n_{k+1}}^0(z)| < c_5^{n_{k+1}} \varepsilon^{[n_{k+1}/m]}.$$

Эти оценки позволяют получить из (5) неравенство

$$\varlimsup_{k \to \infty} (\| r_{N_k} \|_E)^{1/n_{k+1}} < c_6 \varepsilon^{1/m}, \tag{6}$$

Левая часть этого неравенства от $\varepsilon$ не зависит, а правая его часть может быть сделана сколь угодно малой вместе с $\varepsilon$. Таким образом, из (6) приходим к соотношению

$$\lim_{k\to\infty} (\| r_{N_k} \|_E)^{1/n_{k+1}} = 0. \tag{7}$$

Отсюда следует равномерная сходимость (быстрее любой прогрессии) ряда (4) на компакте $E$. Предельную функцию последовательности $\{r_n^0\}$, $n \in \Lambda$ (т. е. сумма ряда (4)), обозначим через $\tilde{f}$. Имеем $\tilde{f}_{|\Delta} = f$, и функция $\tilde{f}$ голоморфна на $E$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2 проводится аналогично. В этом случае в качестве $a_k$ в формуле (3) следует брать точку множества $\alpha_{n_k}$, ближайшую к точке $a$ (или любую из них). Это позволяет получить вместо (6) следующее неравенство (здесь $E \subset D$, $\Delta \subset E$):

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} (\| r_{N_k} \|_E)^{1/N_k} < c_7 \varepsilon^{\tau(a)}.$$

Отсюда вытекает (7) и вместе с этим утверждение теоремы 2.

**4.** Замечания.

1°. Пусть $\alpha_n = \alpha_n^{(1)} \cup \alpha_n^{(2)}$, $L^{(1)} = \{\alpha_n^{(1)}\}'$ ($l^{(1)}$) — множество предельных точек (пределов) последовательности $\{\alpha_n^{(1)}\}$, $D^{(1)}$ — компонента дополнения к множеству $L^{(1)}$, содержащая отрезок $\Delta$, $\mu_n$ — число точек множества $\alpha_n^{(2)}$. Имеют место

Теорема 1′. *Предположим, что $L^{(1)} = l^{(1)}$ — конечное множество и $\mu_n \leqq \mu < +\infty$. Тогда функция $f$ мероморфна в области $\overline{\mathbf{C}} / L^{(1)}$ и имеет в этой области не более, чем $\mu$ полюсов.*

Теорема 2′. *Предположим, что существует точка $a \in L^{(1)}$ такая, что $\tau(a) > 0$ и $\mu_n \leqq \mu < +\infty$. Тогда функция $f$ мероморфна в области $D^{(1)}$ и имеет в этой области не более чем $\mu$ полюсов.*

Теоремы 1′ и 2′ могут быть доказаны методом работы [1] с применением формулы (3) и рассуждений, приведенных выше.

2°. Обозначим через $\rho_n = \rho_n(f, \Delta)$ наилучшее приближение функции $f$ на отрезке $\Delta$ посредством рациональных функций класса $\mathscr{R}_n$. Тогда в условиях приведенных выше теорем имеем $\lim_{n\to\infty} \rho_n^{1/n} = 0$ (см. (7)). Отсюда уже следует (см. [3]), что $\tilde{f}$ — однозначная аналитическая функция во всей (естественной) области ее существования. Следовательно, если $(f, \Delta)$ означает голоморфный элемент многозначной аналитической функции $F$, то множество $l = l(f)$ не может состоять из конечного числа точек при условии $l = L$. В то же самое время, если множество $L = L(f)$ бесконечное, то оно не может обладать „сгустком", т. е. $\tau(a) = 0$ для любого $a \in L$.

3°. Поставим теперь следующий вопрос. Что можно утверждать относительно аппроксимируемой функции $f$ в предположении, что полюсы рациональных функций $r_n^0$, $n \in \mathbf{N}$, расположены вне некоторой окрестности отрезка $\Delta$ (при достаточно больших $n$)?. По-видимому, в некоторой меньшей окрестности отрезка $\Delta$ функция голоморфна (см. [1], где аналогичная задача была рассмотрена для случая аппроксимации

Паде). Методом доказательства теоремы 1 можно извлечь следующие утверждения:

а. Если множество $L$ расположено во внешности круга $|z|<10$, то $f$ голоморфна на отрезке $\Delta$.

б. Если множество $L$ расположено во внешности круга $|z|<R$, где $R>25$, то $f$ голоморфна в круге $|z|<R/5$.

Эти утверждения вытекают из следующего соотношения, полученного при помощи формулы (3); при этом используется вещественнозначность функции $f$.

Если множество $L$ расположено во внешности круга $|z|<R$, то при любом $\rho$, $1<\rho<R$ справедлива оценка ($n \notin \Lambda$):

$$\varlimsup_{n\to\infty}(\| r_{n+1}^0 - r_n^0 \|_{|z|\leqq\rho})^{1/(n+1)} \leqq q(\rho, R) = \frac{2R^2(R+\rho)(\rho+1)^2}{\rho(R-\rho)(R+1)^2}. \tag{8}$$

Добавим, что дополнительная информация о расположении полюсов $\{r_n^0\}$, $n \in \mathbf{N}$ (или множества $L$), а также нулей полинома $\omega$ позволяет существенно уточнять правую часть неравенства (8).

В заключение отметим, что результаты, приведенные выше, дают ответ на некоторые вопросы, поставленные Гончаром в [4].

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Гончар, К. Н. Лунгу. Полюсы диагональных аппроксимаций Паде и аналитическое продолжение функций. *Мат. сборник,* **3**, 1980, № 2, 279—292.
2. Н. И. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимации. Москва, 1965.
3. А. А. Гончар. Локальное условие однозначности аналитических функций. *Мат. сборник,* **89**, 1972, № 1, 148—164.
4. А. А. Гончар. Скорость приближения рациональными дробями и свойства функций. — В: Труды Международного конгресса математиков, Москва, 1966. Москва, 1968, 329—356.

*Московский институт электронного машиностроения Москва СССР*

*Получено 4 июня 1981 г.*