КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ '81
София, 1983, с. 111—114

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
Sofia, 1983, p. 111—114

ПРИБЛИЖЕНИЕ КРИВЫХ С ПОМОЩЬЮ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ

Н. А. Назаренко

Резюме. Решается задача приближения кривых параметрическими сплайнами, т. е. плоской или пространственной кривой по ее дискретной информации сопоставляется некоторый параметрический эрмитов сплайн и исследуются его экстремальные и аппроксимативные свойства. Получены оценки отклонения этих сплайнов от ломаной, соединяещей заданные точки, в различных метриках (евклидовой, Минковского, Хаусдорфа).

Пусть о кривой Г задана информация конечным упорядоченным множеством точек $\mathscr{P}=\{P_k(x_k, y_k)\}_{k=0}^n (n\geqq 2)$ относительно некоторой декартовой системы координат OXY и априорными требованиями общего характера (гладкость, выпуклость на отдельных участках и пр.). Требуется построить плоскую кривую $\{x=x(t),\ y=y(t),\ a\leqq t\leqq b\}$ так, чтобы она последовательно проходила через заданные точки P_k, была гладкой и в определенном смысле восстанавливала кривую Г. Один из способов восстачовления кривой Г — построение кривой S в виде интерполяционного (т. е. последовательно проходящего через точки P_k) параметрического сплайна. Вопросы аппроксимации кривых с помощью параметрических сплайнов рассматривались в работах [1—6] и др. Большинство авторов приводят описание методов построения параметрических сплайнов и их машинной реализации и лишь в отдельных работах исследуются некоторые аппроксимативные и экстремальные свойства этих сплайнов. Чтобы при имеющейся неполной информации о кривой Г можно в какой-то мере судить о погрешности восстановления, будем оценивать отклонение кривой S в той или иной метрике (евклидовой, Минковского, Хаусдорфа) от ломаной l с вершинами в точках P_k. Естественно тогда в качестве параметра t взять длину куска этой ломаной, отсчитываемую от точки P_0. Точке P_0 поставим в соответствие значение параметра $t_0=0$, а точкам P_k $(k=1, 2, \dots, n)$ — значения $t_k=t_{k-1}+h_k$, где $h_k=((\Delta x_k)^2+(\Delta y_k)^2)^{1/2}$, $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, $\Delta y_k=y_k-y_{k-1}$, $t_n=L$, $(L\triangleq\Sigma_{k=1}^n h_k$ — длина ломаной l).

Будем считать, что $S=S_r$ — параметрический эрмитов сплайн r-го порядка $(r=2, 3, \dots)$ в плоскости OXY, т. е.

$$\{x=S_{X,r}(t),\quad y=S_{Y,r}(t),\quad 0\leqq t\leqq L\},$$

где $S_{X,r}(t)$ и $S_{Y,r}(t)$ — эрмитовы сплайны степени r, которые принадлежат $C^{[r/2]}[0, L]$ ($[m]$ — целая часть числа m) и удовлетворяют следующим условиям:

а) $S_{X,r}(t_k)=x_k$, $S_{Y,r}(t_k)=y_k$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n)$,

б) $S'_{X,r}(t_k)=\lambda_k(\Delta x_k/h_k+\Delta x_{k+1}/h_{k+1})$, $S'_{Y,r}=\lambda_k(\Delta y_k/h_k+\Delta y_{k+1}/h_{k+1})$ $(k=1, 2, \ldots, n-1)$,

б′) $S'_{X,r}(t_0)=\lambda_0(\Delta x_1/h_1-\Delta x_2/h_2)$, $S'_{Y,r}(t_0)=\lambda_0(\Delta y_1/h_1-\Delta y_2/h_2)$, $(\lambda_0=\lambda_1)$,

$S'_{X,r}(t_n)=\lambda_n(\Delta x_n/h_n-\Delta x_{n-1}/h_{n-1})$, $S'_{Y,r}(t_n)=\lambda_n(\Delta y_n/h_n-\Delta y_{n-1}/h_{n-1})$,

$(h_n=\lambda_{n-1})$,

если кривая Г незамкнута, и

б″) $S'_{X,r}(t_0)=S'_{X,r}(t_n)=\lambda_n(\Delta x_1/h_1+\Delta x_n/h_n)$, $S'_{Y,r}(t_0)=S'_{Y,r}(t_n)=\lambda_n(\Delta y_1/h_1+\Delta y_n/h_n)$, $(\lambda_n=\lambda_0)$

в случае замкнутой кривой Г, т. е. когда $P_n=P_0$;

в) $S^{(i)}_{X,r}(t_k)=S^{(i)}_{Y,r}(t_k)=0$ $(i=2, 3, \ldots, [r/2],\ k=0, 1, \ldots, n)$.

Здесь λ_k — некоторые положительные числа, находящиеся пока в нашем распоряжении. Вектор этих чисел обозначим через $\Lambda=\{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.

Пусть $E(S_r, l; \Lambda, t)=[(S_{X,r}(t)-l_X(t))^2+(S_{Y,r}(t)-l_Y(t))^2]^{1/2}$ — евклидово расстояние, а $E_M(S_r, l; \Lambda, t)=\max\{|S_{X,r}(t)-l_X(t)|, |S_{Y,r}(t)-l_Y(t)|\}$ — расстояние Минковского между точками кривых S_r и l, соответствующими одному и тому же значению параметра t; $\{x=l_X(t),\ y=l_Y(t),\ 0\leqq t\leqq L\}$ — параметрическое представление ломаной l с указанной выше параметризацией.

Через $H_{i,r}(h; t)$ $(r=1, 2, \ldots;\ i=0, 1, 2, \ldots, [r/2])$ обозначим функцию, определенную на всей числовой прямой, которая вне отрезка $[0, h]$, $(h>0)$ равна нулю и удовлетворяет условиям

$$H^{(j)}_{i,r}(h; 0)=\delta_{i,j}, \quad H^{(j)}_{i,r}(h; h)=0 \quad (i, j=0, 1, \ldots, [r/2],\ r=1, 2, \ldots)$$

($\delta_{i,j}$ — символ Кронекера), причем на $[0, h]$ при нечетном r $H_{i,r}(h; t)$ есть алгебраический многочлен степени r, а при четном r представима в виде

$$H_{i,r}(h; t)=\sum_{s=0}^{r} a_s t^s+a_{r+1}(t-h/2)^r_+, \quad (t-z)^r_+=\{\max(0, t-z)\}^r.$$

Множество всевозможных ломаных l из n звеньев, соединяющих последовательно упорядоченные системы точек $\mathscr{P}=\{P_k\}_{k=0}^n$, обозначим через Q_n, а через $\tilde{Q}_n$ подмножество замкнутых ломаных из Q_n.

Теорема 1. *Для любой ломаной l из Q_n справедлива оценка*

$$E(S_r, l; k, \Lambda, t)\leqq\begin{cases}|f_r(h_k; \lambda_{k-1}, t-t_{k-1})|, & \nu_r(h_k; \Lambda, t)\leqq 0,\\ |f_r(h_k; \lambda_k, t_k-t)|, & \nu_r(h_k; \Lambda, t)>0,\end{cases}$$
$$(t_{k-1}\leqq t\leqq t_k, \quad k=1, 2, \ldots, n; \quad r=2, 3, \ldots),$$

где

$$f_r(h_k;\lambda,u)=(2\lambda-1)H_{1,r}(h_k;u)+H_{1,r}(h_k;h_k-u),\ u\in[0,h_k],$$

и

$$\nu_r(h_k;\Lambda,u)=(1-\lambda_k)H_{1,r}(h_k;h_k-u)-(1-\lambda_{k-1})H_{1,r}(h_k;u),\ u\in[0,h_k].$$

На всем множестве Q_n эта оценка улучшена быть не может.

Из теоремы 1 вытекает ряд следствий, в частности, оценка

$$E_M(S_r,l;k,\Lambda,t)\leq\begin{cases}|f_r(h_k;\lambda_{k-1},t-t_{k-1})| & \nu_r(h_k;\Lambda,t)\leq 0,\\ |f_r(h_k;\lambda_k,t_k-t)|, & \nu_r(h_k;\Lambda,t)>0,\end{cases}$$

$$(t_{k-1}\leq t\leq t_k,\quad k=1,2,\ldots,n;\quad r=2,3,\ldots,),$$

которая на всем множестве Q_n является неулучшаемой.

Теорема 2. *При $r=2,3$ для всех $l\in Q_n$ справедливы оценки*

(1) $$E(S_r,l;k,\Lambda)\triangleq\max\{E(S_r,l;k,\Lambda,t)\leq h_kg_r[\max(\lambda_{k-1},\lambda_k)]:t_{k-1}\leq t\leq t_k\},$$

где $g_2(\lambda)=1/(4(2-\lambda))$ *при* $\lambda\leq 1$ *и* $g_2(\lambda)=(1-2\lambda)^2/(4(3\lambda-2))$ *при* $\lambda\geq 1$, $g_3(\lambda)=[\lambda(9-18\lambda+8\lambda^2)+(3-6\lambda+4\lambda^2)^{3/2}]/(54(1-\lambda)^2)$;

(2) $$E(S_r,l;\Lambda)\triangleq\max\{E(S_r,l;k,\Lambda)\leq hg_r(\bar{\lambda}):1\leq k\leq n\},$$

где $h=\max\{h_k:1\leq k\leq h\}$, $\bar{\lambda}=\max\{\lambda_k;1\leq k\leq n\}$;

(3) $$E(S_r,l)\triangleq\inf_{\lambda}E(S_r,l;\Lambda)\leq\begin{cases}h/8, & r=2,\\ \sqrt{3}h/18, & r=3.\end{cases}$$

Оценки (1)—(3) на всем множестве Q_n улучшены быть не могут.

Аналогичные оценки имеют место для отклонения сплайнов S_r $(r=2,3)$ от ломаной $l\in Q_n$ в метрике Минковского. В случае, когда вектор Λ имеет равные координаты, т. е. $\lambda_k=\lambda$ $(k=0,1,2,\ldots,n)$, положим $E_{L_2}(S_r,l)\triangleq\min_{\lambda>0}(\int_0^LE^2(S_r,l;\Lambda,t)dt)^{1/2}$.

Теорема 3. *Для ломаной $l\in\tilde{Q}_n$ имеют место равенства*

$$E_{L_2}(S_2,l)=\frac{1}{2\sqrt{30}}\Big(\sum_{k=1}^nh_k^3-\Big(\sum_{k=1}^nh_k^3(2+A_{k-1}+A_k)\Big)^2$$

$$\times\Big[2\sum_{k=1}^nh_k^3(7+2A_{k-1}+2A_k-3B_k)\Big]^{-1}\Big)^{1/2}$$

$$E_{L_2}(S_3,l)=\frac{1}{\sqrt{210}}\Big(\sum_{k=1}^nh_k^3-\Big(\sum_{k=1}^nh_k^3(2+A_{k-1}+A_k)\Big)^2$$

$$\times\Big[4\sum_{k=1}^nh_k^3(5+A_{k-1}+A_k-3B_k)\Big]^{-1}\Big)^{1/2},$$

где

$$A_k=(\Delta x_k\Delta x_{k+1}+\Delta y_k\Delta y_{k+1})/h_kh_{k+1},\ B_k=(\Delta x_{k-1}\Delta x_{k+1}+\Delta y_{k-1}\Delta y_{k+1})/h_{k-1}h_{k+1}$$

$$(A_0=A_n,\quad B_1=B_n,\quad \Delta x_{n+1}=\Delta x_1,\quad \Delta y_{n+1}=\Delta y_1,\quad h_{n+1}=h_1).$$

Пусть

$$R(S_r, l) = \max \{ \max_{M \in S_r} \min_{N \in l} \rho(M, N), \max_{M \in l} \min_{N \in S_r} \rho(M, N) \}$$

хаусдорфово расстояние между кривыми S_r и l, где

$$\rho(M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)) = ((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)^{1/2}.$$

Теорема 4. *Для любой ломаной $l \in Q_n$ справедлива оценка*

$$R(S_r, l) \leq \frac{\bar{\lambda} h}{2^{m+1} m!} \sum_{s=0}^{m-1} \frac{(m+s)!}{s!\, 2^s} \qquad (m = [r/2]),$$

где $h = \{\max h_k : 1 \leq k \leq n\}$, $\bar{\lambda} = \{\max \lambda_k : 1 \leq k \leq n\}$.

На всем множестве Q_n эта оценка улучшена быть не может.

Возьмем теперь в качестве кривой $\tilde{S}$ параметрический эрмитов сплайн пятого порядка $\tilde{S}_5 : \{x = \tilde{S}_{X,5}(t),\ y = \tilde{S}_{Y,5}(t)\}$, $(0 \leq t \leq L)$, где $\tilde{S}_{X,5}(t)$ и $\tilde{S}_{Y,5}(t)$ — эрмитовы сплайны пятой степени, удовлетворяющие условиям $\tilde{S}^{(i)}_{X,5}(t_k) = u^{(i)}_k(t_k)$, $\tilde{S}^{(i)}_{Y,5}(t_k) = v^{(i)}_k(t_k)$ $(i = 0, 1, 2; k = 0, 1, \ldots, n)$, а функции $u_k(t)$ и $v_k(t)$ совпадают соответственно с параболами, проходящими через точки (t_{k-1}, x_{k-1}), (t_k, x_k), (t_{k+1}, x_{k+1}) и (t_{k-1}, y_{k-1}), $(t_k\ y_k)$, (t_{k+1}, y_{k+1}).

В случае незамкнутой кривой Г полагаем

$$\tilde{S}^{(i)}_{X,5}(t_0) = \tilde{S}^{(i)}_{X,5}(t_1),\ \ \tilde{S}^{(i)}_{X,5}(t_n) = \tilde{S}^{(i)}_{X,5}(t_{n-1})\ \ (i = 1, 2),$$

$$\tilde{S}^{(i)}_{Y,5}(t_0) = \tilde{S}^{(i)}_{Y,5}(t_1),\ \ \tilde{S}^{(i)}_{Y,5}(t_n) = \tilde{S}^{(i)}_{Y,5}(t_{n-1})\ \ (i = 1, 2).$$

Найдены точные оценки отклонения этих сплайнов от ломаной $l \in Q_n$ в различных метриках.

Замечание. Полученные результаты легко распространяются на случай пространственных кривых.

Отметим, наконец, что доказательство приведенных здесь утверждений основано на общих соображениях, которые содержатся в работах [7—8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Алберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш. Теория сплайнов и ее приложения. Москва, 1972.
2. Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко. Методы сплайн-функций. Москва, 1980.
3. Бл. Сендов. Хаусдорфовые приближения. София, 1979.
4. G. Bär. Parametrische Interpolation empirischer Raumkurven. *Z. Angew. Math. Mech.*, **57**, 1977, № 6, 305—314.
5. C. De Boor. A practical quide to splines. New York, 1978.
6. H. Späth. Spline-Algorithmen zur Konstruktion glatter Kurven und Flächen. München, 1973.
7. Н. А. Назаренко. О восстановлении плоских кривых с помощью параметрических эрмитовых сплайнов. — В: Сплайны в задачах аппроксимации и сглаживания. Киев, 1978, 11—31.
8. Н. А. Назаренко. О приближении плоских кривых параметрическими эрмитовыми сплайнами. *Укр. матем. ж.*, **31**, 1979, № 2, 201—205.

Институт математики АН УССР
252601 Киев СССР

Получено 5 июня 1981 г.