КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'81
София, 1983, с. 115—117

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
Sofia, 1983, p. 115—117

АППРОКСИМАЦИЯ КРИВЫХ НА ПЛОСКОСТИ

М. Г. Николчева

Резюме. Рассматривается вопрос об аппроксимации кривых на плоскости относительно хаусдорфова расстояния полиномиальными кривыми, ломаными и сплайнами, которые состоят из кусков окружностей.

Получены оценки для наилучшего хаусдорфова приближения. Например, порядок наилучшего хаусдорфова приближения для кривых, у которых конечная длина и ограниченная первая производная кривизны, $O(n^{-3})$, когда приближаем сплайнами, которые состоят из кусков окружностей.

Приближение кривых на плоскости полиномиальными кривыми в метрике Хаусдорфа рассматривается давно.

I. Обозначим через Γ_l класс всех кривых, у которых конечная длина l. Сендов [1, 2] доказал, что если $\Gamma \in \Gamma_l$, ее наилучшее приближение $E_n(\Gamma)_r$ полиномиальными кривыми n-ой степени в метрике Хаусдорфа удовлетворяет неравенство $E_n(\Gamma)_r \leqq \pi e/2(n+1)$, и это неравенство точное по порядку в классе Γ_l. Точнее, существует константа $c>0$, такая, что $cl/(n+1) \leqq \sup\{E_n(\Gamma)_r:\ \Gamma \in \Gamma_l\}$.

Сендов и Попов [3] показали, что для каждой индивидуальной спрямляемой кривой Γ

$$E_n(\Gamma)_r = o(1/n).$$

Можно показать, что для каждой последовательности $\{\varepsilon_n\}_1^\infty$, $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, существует спрямляемая кривая Γ и подпоследовательность $\{\varepsilon_{n_k}\}$, для которых исполнено $E_n(\Gamma)_r \geqq \varepsilon_{n_k}/n_k$ [4].

II. Пусть $\Gamma \in \Gamma_l$, Γ — выпуклая кривая. Обозначим через $\Gamma(t)$ множество всех параметрических представлений кривой Γ, $t \in [0, 1]$, т. е. $\Gamma(t)$ состоит из пар функции $(\varphi(t), \psi(t))$, таких, что $\Gamma = \{(x, y):\ x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ 0 \leqq t \leqq 1\}$. Коротко будем писать $\Gamma = (\varphi(t), \psi(t)) = (\varphi, \psi)$.

Обозначим через $H_n(t)$ множество всех полиномиальных кривых n-ой степени, т. е. $\gamma \in H_n(t)$, если

$$\gamma = \{(x, y):\ x = p(t),\ y = q(t),\ p(t) \in H_n,\ q(t) \in H_n,\ t \in [0,1]\},$$

где H_n — множество алгебраических многочленов n-ой степени.

Ограниченную кривую θ на плоскости будем называть ломаной n-ого порядка, если существуют n отрезков A_iA_{i+1}, $i = 1, \ldots n$, такие, что

$\theta=\cup_{i=1}^{n} A_i A_{i+1}$. Точки A_i, $i=1, \ldots, n$, будем называть вершинами ломаной θ.

Обозначим через L_n множество всех ломаных n-ого порядка. Ломаную θ будем называть вписанной в Γ, если ее вершины лежат на Γ. При этих обозначениях будем называть

1. Наилучшее параметрическое приближение кривой Γ ломаными n-ого порядка

$$\varepsilon_n(\Gamma)=\inf \max \{\|\varphi-f\|, \|\psi-g\|;\ (\varphi, \psi) \in \Gamma(t),\ \theta=(f, g) \in L_n\},$$

где $\|\varphi-f\|=\sup\{|f(t)-\varphi(t)|:\ t \in[0,1]\}$.

2. Наилучшее параметрическое приближение кривой Γ полиномиальными кривыми n-ой степени

$$\tilde{\varepsilon}_n(\Gamma)=\inf \max \{\|\varphi-p\|, \|\psi-q\|;\ (\varphi, \psi) \in \Gamma(t),\ p \in H_n,\ q \in H_n\}.$$

Попов [4] доказал, что если $\Gamma \in \Gamma_l$ и Γ—выпуклая кривая, то для нее:

1) наилучшее параметрическое приближение вписаными ломаными n-ого порядка $\varepsilon_n(\Gamma)=O(n^{-2})$; 2) наилучшее параметрическое приближение полиномиальными кривыми n-ой степени $\tilde{\varepsilon}_n(\Gamma)=O(n^{-2}\ln^2 n)$. и в совокупности K_l всех выпуклых кривых длиной l, $\sup\{\tilde{\varepsilon}_n(\Gamma):\ \Gamma \in K_l\} \geqq c n^{-2}$, где c — константа.

III. Обозначим через K_n^* совокупность всех кривых Γ на плоскости, которые состоят из кусков окружностей, а через K_M — кривизну Γ в точке M. Докажем

Теорема. *Для каждой $\Gamma \in \Gamma_e$, первая производная кривизны которой ограничена, т. е. $\max\{|K_M'|:\ M \in \Gamma\} \leqq A$, где A — константа, существует кривая $K_n \in K_n^*$, такая, что*

$$r(\Gamma, K_n) \leqq A l^3 n^{-3}/48$$

для достаточно больших n.

Доказательство. Разобъем Γ на n равных частей $\{\Gamma_i\}_{i=1}^{n}$. Средняя кривизна $K_{\text{ср}}$ кривой Γ ограничена, потому что $\max\{|K_M'|:\ M \in \Gamma\} \leqq A$.

Пусть C_i — окружность кривизны в средней точке M_i части Γ_i. Обозначим через R_i и O_i соответственно радиус и центр окружности C_i. Выбираем координатную систему следующим образом: ось Oy совпадает с прямой $M_i O_i$. Тогда $Ox \| t_i$, где t_i — общая касательная для Γ_i и C_i в точке M_i. Для достаточно больших n часть Γ_i можно представить $\Gamma_i:\ y_i=f_i(x)$. Пусть ось Ox так расположена, что центр O_i имеет координаты $(0, f_i(0)-R_i)$. Тогда уравнение окружности следующее:

$$C_i:\ x^2+[y-(f_i(0)-R_i)]^2=R_i^2.$$

Следовательно,

$$y(x)=\sqrt{R_i^2-x^2}+f_i(0)-R_i.$$

Но $f_i'(0)=y'(0)=0$, потому что в точке O_i имеем локальный максимум. Следовательно, кривизна

$$K_{M_i}=-\frac{1}{R_i}=f_i''(0)=-|f_i''(0)|.$$

Тогда

$$y(x)=f_i(0)-\frac{1}{|f_i''(0)|}+\frac{1}{|f_i''(0)|}\sqrt{1-x^2f_i''^2(0)}.$$

Но

$$f_i(x)=f_i(0)+\frac{x^2}{2!}f_i''(0)+\frac{x^3}{3!}f_i'''(\xi)$$

и

$$f(x)-y(x)=\frac{x^2f_i''(0)}{2}+\frac{x^3f_i'''(\xi)}{6}+\frac{1}{|f_i''(0)|}-\frac{\sqrt{1-x^2f_i''^2(0)}}{|f_i''(0)|}$$

$$=\frac{x^2f_i''^2(0)}{|f_i''(0)|}+\frac{1-x^4f_i''^4(0)+x^4f_i''^4(0)}{|f_i''(0)|}-\frac{1-x^2f_i''^2(0)}{|f_i''(0)|\sqrt{1-x^2f_i''^2(0)}}$$

$$+\frac{x^3f_i'''(\xi)}{6}\leq-\frac{x^2f_i''^2(0)}{|f_i''(0)|}+\frac{(1-x^2f_i''^2(0))\,(1+x^2f_i''^2(0))}{|f_i''(0)|}$$

$$-\frac{1-x^2f_i''(0)}{|f_i''(0)|}+\frac{x^4f_i''^4(0)}{|f_j''(0)|}+\frac{x^3f_i'''(\xi)}{6}$$

$$=-\frac{x^2f_i''^2(0)}{|f_i''(0)|}+\frac{(1-x^2f_i''^2(0))x^2f_i''^2(0)}{|f_i''(0)|}+\frac{x^4f_i''^4(0)}{|f_i''(0)|}+\frac{x^3f_i'''(\xi)}{6}$$

$$=-\frac{x^4f_i''^4(0)}{|f_i''(0)|}+\frac{x^4f_i''^4(0)}{|f_i''^4(0)|}+\frac{x^3f_i'''(\xi)}{6}=\frac{x^3f_i'''(\xi)}{6}.$$

Кроме того, $x\leq l/2n$. Следовательно, $r(\Gamma, K_n)\leq Al^3n^{-3}/48$, $K_n=\cup_{i=1}^n C_i$. Этим теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бл. Сендов. Апроксимиране на точкови съвкупности с полиномиални криви в равнината. *Год. Соф. унив., Мат. фак.*, **60**, 1967, 1965/66, 211—222.
2. Бл. Сендов. Некоторые вопросы теории приближения функции и множеств в хаусдорфовой метрике. *Успехи мат. наук*, **24**, 1969, 143—178.
3. Бл. Сендов, В. А. Попов. Аппроксимация кривых на плоскости полиномиальными кривыми. *Доклады БАН*, 23, 1970, 639—642.
4. В. А. Попов. Параметрическое приближение выпуклых кривых полиномиальными кривыми. *Год. Соф. унив., Фак. Мат. Мех.*, **67**, 1976, 333—341.

Единен център по математика и механика 1090 София, п. к. 373 България

Получено 16 июня 1981 г.