КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'81
София, 1983, с. 118—120

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
Sofia, 1983, p. 118—120

ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ ДВУМЕРНЫМИ ЭРМИТОВЫМИ СПЛАЙНАМИ НА КЛАССАХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

С. В. Переверзев

Резюме. Найдены точные оценки погрешности приближения в равномерной метрике двумерными эрмитовыми сплайнами на классах дифференцируемых периодических функций двух переменных.

Пусть $C^{\mathbf{m}}$, $\mathbf{m}=(m_1, m_2)$ $(m_i=0, 1, 2, \dots, i=1, 2)$ — линейное пространство функций $f(x, y)$, имеющих на квадрате $R=[0, 1]\times[0, 1]$ непрерывные частные производные $f^{(i, j)}=D_x^i D_y^j f$, $i=\overline{0, m_1}$, $j=\overline{0, m_2}$. Рассмотрим целочисленные векторы $\mathbf{r}=(r_1, r_2)$, $\mathbf{l}=(l_1, l_2)$ $(r_i=0, 1, 2, \dots; l_i=1, 2, \dots; i=1, 2)$ и разбиения $\Delta_{l_1}=\{0=x_0<x_1<\dots<x_{l_1}=1\}$, $\Delta_{l_2}=\{0=y_0<y_1<\dots<y_{l_2}=1\}$, $\Delta_{\mathbf{l}}=\Delta_{l_1}\times\Delta_{l_2}$ множеств $[0, 1]$ и R, соответственно. Положим

$$|\Delta_{l_1}|=\max\{|x_i-x_{i-1}|:\ 1\le i\le l_1\},\quad |\Delta_{l_2}|=\max\{|y_i-y_{j-1}|:\ 1\le j\le l_2\}.$$

Пусть еще $S^1_{\mathbf{r},\mathbf{l}}$, $S^2_{\mathbf{r},\mathbf{l}}\subset C^{\mathbf{r}}$ — множества функций $\sigma_{\mathbf{r},\mathbf{l}}(x, y)_1$ и $\sigma_{\mathbf{r},\mathbf{l}}(x, y)_2$ соответственно таких, что при $(x, y)\in R_{i,j}=[x_{i-1}, x_i]\times[y_{j-1}, y_j]$, $i=\overline{1, l_1}$, $j=\overline{1, l_2}$,

$$\sigma_{\mathbf{r},\mathbf{l}}(x, y)_1=\sum_{k=0}^{2r_1+1}\sum_{n=0}^{2r_2+1} a^{i,j}_{kn}\, x^k y^n,$$

$$\sigma_{\mathbf{r},\mathbf{l}}(x, y)_2=\sum_{k=0}^{2r_1+1}\sum_{n=0}^{2r_2} b^{i,j}_{kn}\, x^k y^n+(y-\bar{y}_j)^{2r_2}\times\sum_{k=0}^{2r_1+1} c^{i,j}_k x^k,$$

где $\bar{y}_j=(y_j+y_{j-1})/2$, а $u_+^{\nu}=[\max(0, u)]^{\nu}$.

Сопоставим каждой функции $f\in C^{\mathbf{m}}$ $(m_i\ge r_i, i=1, 2)$ функции $\sigma_{\mathbf{r},\mathbf{l}}(f; x, y)_k\in S^k_{\mathbf{r},\mathbf{l}}$, $k=1, 2$, удовлетворяющие интерполяционным условиям

$$\sigma^{(\mu,\nu)}_{\mathbf{r},\mathbf{l}}(f; x_i, y_j)_k=f^{(\mu,\nu)}(x_i, y_j),\ \mu=\overline{0, r_1},\ \nu=\overline{0, r_2},\ i=\overline{0, l_1},\ j=\overline{0, l_2}.$$

Функции $\sigma_{\mathbf{r},\mathbf{l}}(f; x, y)_k$, $k=1, 2$, называются соответственно двумерными эрмитовыми сплайнами нечетной степени и комбинированной четности для функции f по разбиению $\Delta_{\mathbf{l}}$.

Определим функции $e^k_{\mathbf{r},\,\mathbf{l}}(f;\ x,\ y)=f(x,\ y)-\sigma_{\mathbf{r},\,\mathbf{l}}(f;\ x,\ y)_k$, $k=1,\ 2$. В дальнейшем считаем $r_i=[m_i/2]$, $i=1,\ 2$ ($[\nu]$ — целая часть числа ν). Для класса $\mathfrak{M}\subset C^{\mathbf{m}}$ рассмотрим задачу отыскания величин

$$E_k(\mathfrak{M},\ \Delta_{\mathbf{l}})=\sup_{f\in\mathfrak{M}}\max_R|e^k_{\mathbf{r},\,\mathbf{l}}(f;\ x,\ y)|,\quad k=1,\ 2. \tag{1}$$

Следует сказать, что в настоящее время известно много работ, в которых получены точные оценки приближения эрмитовыми сплайнами на классах функций одной переменной (см., например, [1—4]). Для классов функций двух переменных таких результатов гораздо меньше. Вероятно впервые точное значение величины (1) при $k=1$ получили Биркгоф, Шульц, Варга [5] в случае четного числа интерполяционных условий в узлах разбиения $\Delta_{\mathbf{l}}$ и для функций, имеющих одинаковые дифференциальные свойства по каждой переменной. Кроме того, величина (1) ($k=1$) в некоторых частных случаях найдена Сторчаем [6], Давидчиком [7] и Вроничем [8].

В настоящем сообщении будет приведено решение задачи (1) ($k=1,\ 2$) при некоторых сочетаниях p_i и q_j ($p_i=1,\ 2,\ldots,\ i=1,\ 2;\ 1\leq q_j\leq\infty$, $j=1,\ 2,\ 3$) для классов $\tilde W^{\mathbf{p}}_{q_1,\,q_2,\,q_3}$, $\mathbf{p}=(p_1,\ p_2)$ 1-периодических по каждой переменной функций $f(x,\ y)\in C^{(p_1-1,\ p_2-1)}$, которые имеют кусочно-непрерывные частные производные $f^{(p_1,\ m)}$, $f^{(n,\ p_2)}$, $m=\overline{0,\ p_2}$, $n=\overline{0,\ p_1}$ и удовлетворяют условиям

$$D^{p_1}_xD^j_yf=D^j_yD^{p_1}_xf,\ j=\overline{1,\ p_2};\quad D^{p_2}_yD^i_xf=D^i_xD^{p_2}_yf,\ i=\overline{1,\ p_1}.$$

$$\Big\|\int_0^1 f^{(p_1,\ 0)}(\cdot,\ y)dy\Big\|_{L_{q_1}(0,\ 1)}\leq 1,\quad \Big\|\int_0^1 f^{(0,\ p_2)}(x,\ \cdot)dx\Big\|_{L_{q_2}(0,\ 1)}\leq 1,$$

$$\|f^{(p_1,\ p_2)}(\cdot,\ \cdot)\|_{L_q(R)}\leq 1,$$

где $L_q(0,\ 1)$ и $L_q(R)$ — соответственно пространства суммируемых в q-й степени (существенно ограниченных, если $q=\infty$) на множествах $(0,\ 1)$ и R функций одной и двух переменных с обычными нормами.

Отметим, что при $q_1=q_2=q_3$ классы $\tilde W^{\mathbf{p}}_{q_1,\,q_2,\,q_3}$ рассматривались в [9, 10] в связи с задачей о построении наилучшей кубатурной формулы.

Теорема 1. *Пусть* $p_i=2r_i+2$, $|\Delta_{l_i}|<\min\{b_{2r_i},\ b^*_{2r_i+2}\}$, $r_i=0,1,2,\ldots$, $i=1,\ 2$. *Тогда*

$$E_1(\tilde W^{\mathbf{p}}_{1,\,1,\,1},\ \Delta_{\mathbf{l}})=(1+|B^*_{p_1}|/p_1!)\Theta_{r_2,\,l_2}+(1+|B^*_{p_2}|/p_2!)\Theta_{r_2,\,l_1}-\Theta_{r_2,\,l_2}\Theta_{r_1,\,l_1},$$

где $B^*_p=B_p(1-2^{-p})$, B_p — *число Бернулли с номером* p.

$\Theta_{r,\,l}=|\Delta_l|^{2r+1}/[(2r+1)(2r!!)^2 2^{2r+3}]$, а $b_{2\nu}$, $b^*_{2\nu}$ — соответственно наименьшие нули многочленов $B_{2\nu}(z)$ и $B_{2\nu}(z)-B_{2\nu}2^{-2\nu}$ ($B_{2\nu}(z)$ — многочлен Бернулли степени 2ν) на $[0,\ 1]$.

Теорема 2. *Пусть* $p_1=2r_1+2$, $p_2=2r_2+1$. *Если* $|\Delta_{l_1}|<b_{2r_1}$, *то*

$$E_k(\tilde W^{\mathbf{p}}_{\infty,\,\infty,\,\infty},\ \Delta_{\mathbf{l}})=(1+K_{p_2}/(2\pi)^{p_2})\nu_{r_1,\,l_1}+4(1+K_{p_1}/(2\pi)^{p_1})\Theta_{r_2,\,l_2}-4\nu_{r_1,\,l_1}\Theta_{r_2,\,l_2},$$
$$k=1,\ 2.$$

где $\nu_{r,\,l}=|\Delta_l|^{2r+2}/[2r+2)!\ 2^{2r+2}]$, *а*

$$K_p = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m(p+1)}}{(2m+1)^{p+1}}$$

константа Фавара.

Результат, аналогичный теореме 2, получен и для класса $\widetilde{W}^{(2r_1+1,\,2r_2+2)}_{\infty,\,\infty,\,\infty}$. Кроме того, нами найдены значения величины (1) при $k=1$ для классов $\widetilde{W}^{(2r_1+2,\,2r_2+2)}_{q_1,\,q_2,\,q_3}$, $\widetilde{W}^{(2r_1+2,\,2r_2+1)}_{q_1,\,\infty,\,\infty}$, $\widetilde{W}^{(2r_1+1,\,2r_2+2)}_{\infty,\,q_2,\,\infty}$ $(q_j=1, \ \infty; \ \ j=1,\,2,\,3)$, а также значение величины (1) при $k=2$ для класса $\widetilde{W}^{(2r_1+2,\,2r_2+1)}_{1,\,\infty,\,\infty}$. В качестве примера приведем следующее утверждение:

Теорема 3. *В условиях теоремы* 1

$$E_1(\widetilde{W}^{\mathbf{p}}_{\infty,\,\infty,\,1};\ \Delta_{\mathbf{l}}) = \Theta_{r_1,\,l_1}\,|\,B^{*}_{p_2}\,|/p_2\,! + \Theta_{r_2,\,l_2}\,|\,B^{*}_{p_1}\,|/p_1\,! + \nu_{r_2,\,l_2} + \nu_{r_1,\,l_1} - \Theta_{r_1,\,l_1}\,\Theta_{r_2,\,l_2}.$$

Отметим, что для класса $\widetilde{W}^{(2r_1+2,\,2r_2+2)}_{\infty,\,\infty,\,\infty}$ удается получить более сильный результат.

Теорема 4. *Пусть* $p_i=2r_i+2$, $|\,\Delta_{l_i}|<b_{2r_i}$, $r_i=0,\,1,\,2,\,\ldots;\ i=1,\,2$ $(b_0=b_2)$. *Если* $(x,\,y)\in R_{i,\,j}$, *то*

$$\sup_{f\in\widetilde{W}^{\mathbf{p}}_{\infty,\,\infty,\,\infty}} |\,e_{\mathbf{r},\,1}(f;\ x,\,y)\,| = (1+K_{p_1}/(2\pi)^{p_1})\psi_{j,\,p_2}(y)$$
$$+(1+K_{p_2}/(2\pi)^{p_2}\,\psi_{i,\,p_1}(x) - \psi_{i,\,p_1}(x)\psi_{j,\,p_2}(y),$$

где $\psi_{i,\,p_1}(x)=[(x-x_{i-1})(x_i-x)]^{r_1+1}/p_1\,!$, $\psi_{j,\,p_2}(y)=[(y-y_{j-1})(y_j-y)]^{r_2+1}/p_2\,!$.

В заключение заметим, что общие соображения, на которых основано доказательство приведенных здесь результатов, содержатся в [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Великин. Точные значения приближения эрмитовыми сплайнами на классах дифференцируемых функций. *Изв. АН СССР, Сер. матем.*, **37**, 1973, № 1, 165—185.
2. А. А. Лигун, В. Ф. Сторчай. О наилучшем выборе узлов при интерполировании функций эрмитовыми сплайнами. *Analysis Math.*, **2**, № 4, 1976, 267—275.
3. Н. А. Назаренко, С. В. Переверзев. Точные значения приближения эрмитовыми сплайнами четной степени на классах дифференцируемых функций. *Мат. заметки*, **28**, 1980, № 1, 33—44.
4. А. А. Лигун. Об одном свойстве интерполяционных сплайн-функций. *Укр. матем. ж.*, **32**, № 4, 507—514.
5. G. Birkhoff, M. N. Schultz, R. S. Varga. Piecewise Hermite interpolation in one and two variables with applications to partial differential equations. *Numer. Math.*, **11**, 1968, 232—256.
6. В. Ф. Сторчай. Приближение непрерывных функций двух переменных многомерными функциями и сплайн-функциями в равномерной метрике. — В: Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. Днепропетровск, 1975, № 6, 82—89.
7. А. А. Давидчик. Приближение функций двух переменных сплайнами. Там же. Вып. 5, 1974, 37—42.
8. Z. Wronicz. Approximaţion and interpolation by multiple splines. *Zeszyty Nauk. Univ. Jagiellon. Prace Mat.*, **403**, № 17, 147—157.
9. Н. Е. Лушпай, С. В. Переверзев. О наилучших кубатурных формулах для классов дифференцируемых функций двух переменных. — В: Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. Днепропетровск. 1976, № 7, 38—45.
10. М. И. Левин, Ю. М. Гиршович. Экстремальные задачи для кубатурных формул. *Докл. АН СССР*, **236**, 1977, № 6, 1303—1306.
11. С. В. Переверзев. Точные значения приближения эрмитовыми сплайнами на одном классе функций двух переменных. *Укр. мат. ж.* **31**, 1979, № 5, 510—516.

Институт математики АН УССР
252601 Киев СССР

Получено 4 июня 1981 г.