КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'81
София, 1983, с. 121—124

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
Sofia, 1983, p. 121—124

НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ В ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ

П. П. Петрушев

Резюме. При помощи некоторых новых характеристик функций получена характеризация эффекта $o(\cdot)$ при равномерной рациональной аппроксимации функции f, для которой $f^{(r)}$ имеет ограниченную вариацию.

Обозначим через R_n множество всех рациональных функций n-того порядка с действительными коэффициентами, а через $R_n(f)_C$ и $R_n(f)_L$ — наилучшие приближения функции f на $[a, b]$ элементами R_n относительно равномерной и интегральной метрик. Например,

$$R_n(f)_C=\inf\{\|f-q\|_{C[a,b]}: q\in R_n\},\ \|g\|_{C[a,b]}=\sup\{|g(x)|: x\in[a,b]\}.$$

Обозначим через $V_r=V_r(M, [a, b])$ множество всех функций f, для которых $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$, и $f^{(r-1)}$ является первообразной некоторой функции $f^{(r)}$ с ограниченной вариацией ($Vf^{(r)}=V_a^b f^{(r)}\leqq M<\infty$).

Ниже через $C(\cdots)$, $C_1(\cdots)$, ... будем обозначать положительные „константы", зависящие только от параметров, стоящих в скобках.

Попов [1] нашел точный порядок наилучших равномерных рациональных приближений класса V_r:

Теорема А. *Пусть $M\geqq 0$, $[a, b]$ — конечный отрезок, $r\geqq 1$. Тогда*

$$\sup\{R_n(f)_C: f\in V_r(M, [a, b])\}=C_{(r)}M(b-a)^r n^{-r-1},\quad n\geqq r.$$

В [2] показано, что при рациональной аппроксимации „индивидуальной" функции из класса V_r появляется эффект $o(\cdot)$:

Теорема Б. *Для любой функции $f\in V_r$ $(r\geqq 1)$ имеет место оценка*

$$R_n(f)_C=o(n^{-r-1}),\tag{1}$$

т. е. для любой функции $f\in V_r$ $(r\geqq 1)$ существует последовательность $\{\varepsilon_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$, $\varepsilon_n(f)\searrow 0$ при $n\to\infty$, такая, что

$$R_n(f)_C\leqq\varepsilon_n(f)\,.\,n^{-r-1},\quad n\geqq 1.\tag{2}$$

Основная цель настоящей статьи сделать характеризацию эффекта $o(\cdot)$ в оценке (1), т. е. заменить последовательность $\{\varepsilon_n(f)\}$ в (2) через некоторую характеристику функции f. При этом будут обобщены следующие два утверждения:

Теорема В [3]. *Пусть $f\in V_r$ и $f^{(r)}$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$, $r\geq 1$. Тогда*

$$R_n(f)_C = O(n^{-r-1}\,.\,\omega(f^{(r+1)};\ 1/n)_L), \tag{3}$$

где $\omega(g;\ \delta)_L = \sup\{\int_a^{b-h} |g(x+h)-g(x)|\,dx:\ 0<h\leq\delta\}$ — интегральный модуль непрерывности функции g.

Теорема Г [4]. *Имеет место оценка*

$$\sup\{R_n(f)_C:\ f\in \mathrm{Conv}_r(M,\ [a,\ b])\} = O(n^{-r-2}),\quad n\geq r\geq 1, \tag{4}$$

где $\mathrm{Conv}_r(M, [a, b])$ — множество функций f, для которых $f^{(r)}$ выпукла на $[a, b]$ $(r\geq 1)$ и $\|f^{(r)}\|_{C[a,b]}\leq M<\infty$.

Когда $f^{(r)}$ абсолютно непрерывна, то $o(\cdot)$ в оценке (1) естественно характеризуется через $\omega(f^{(r+1)};\ n^{-1})_L$, см. (3). В случае, когда $f\in V_r$ $o(\cdot)$, в оценке (1) очевидно не улавливается $\omega(f^{(r+1)};\ n^{-1})_L$.

Определение функции $\theta(g;\ s)$. Будем рассматривать функции $g(x)$ с ограниченной на отрезке $[a, b]$ вариацией, при этом будем считать, что

$$\min\{g(x-0),\ g(x+0)\}\leq g(x)\leq \max\{g(x-0),\ g(x+0)\}\ \text{при}\ x\in[a,\ b]. \tag{5}$$

Последнее условие несущественно, но сократит в некоторой степени наши рассуждения. Дополненный график g функции $g(x)$ (в дальнейшем будем писать аргумент функции) определяется как точечное множество на плоскости, которое получается из графика функции $g(x)$, добавляя в точках x^* разрыва функции $g(x)$ минимальные отрезки, содержащие точки $(x^*, g(x^*-0))$ и $(x^*, g(x^*+0))$, см. [5]. Дополненный график g функции $g(x)$ рассматриваем как кривую на плоскости. Ввиду (5) кривая g не имеет двойных точек. Обозначим через $l=l(g)$ длину кривой g. Очевидно $l(g)<\infty$. Обозначим через s естественный параметр (длина кривой) кривой g, параметризированной от точки $(a, g(a))$ к точке $(b, g(b))$. Для почти всех значений параметра $s\in[0, l]$ в соответствующей точке $(x(s), y(s))\in g$ существует касательная к g. Обозначим через $\theta(g;\ s)$ направленный угол, заключенный между касательным вектором к кривой g в точке $(x(s), y(s))$ и оси Ox. Функция $\theta(g;\ s)$ очевидно измерима и $|\theta(g;\ s)|\leq\pi/2$ для почти всех $s\in[0, l]$. Очевидно, если существует $g'(x(s))$ для некоторого $s\in[0, l]$, то $\theta(g;\ s)=\operatorname{arctg} g'(x(s))$.

Нашим основным утверждением является следующая

Теорема 1. *Для любой функции $f\in V_r(M, [a, b])$, $M\geq 0$, $-\infty<a<b<\infty$, $r\geq 1$, имеет место оценка*

$$R_n(f)_C\leq C(r)l(b-a)^r n^{-r-1}\omega(\theta(f^{(r)};\ s);\ ln^{-1}),\quad n\geq r+1, \tag{6}$$

где $l=l(f^{(r)})$.

Оценка (6) доказывается при помощи следующей теоремой.

Теорема 2. *Пусть функция $f\in V_r(M, [a, b])$, $M\geq 0$, $r\geq 1$ и $V\theta(f^{(r)})<\infty$. Тогда*

$$R_n(f)_C\leq C(r)(M^2+(b-a)^2)(b-a)^{r-1}V\theta(f^{(r)})n^{-r-2},\quad n\geq r+1. \tag{7}$$

Ввиду того, что $\theta(g; s) \in L_1[0, l(g)]$, если $g(x)$ — функция с ограниченной на $[a, b]$ вариацией, то оценка (1) следует из оценки (6).

Укажем некоторые свойства функции $\theta(g; s)$.

Зная $(a, g(a))$ и $\theta(g; s)$ для почти всех $s \in [0, l]$, однозначно можно восстановить кривую g. Однако по $g'(x)$ можно восстановить функцию $g(x)$ лишь когда $g(x)$ абсолютно непрерывна.

Если функция $g(x)$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$, то $V\theta(g) \leqq C_1 V_{g'}$ и $\omega(\theta(g; s); \delta)_L \leqq C_2 \omega(g', \delta)_L$; $\delta \geqq 0$. Следовательно, оценка (6) является обобщением оценки (3).

Если $g(x) \in \mathrm{Lip}\,1$, то $\omega(\theta(g; s); \delta)_L \asymp \omega(g'; \delta)_L$.

Если функция $g(x)$ выпукла и ограничена на $[a, b)$, то $V\theta(g) < \infty$ и, следовательно, оценка (4) следует из (6) и (7), т. е. оценка (6) содержит оценки (1), (3) и (4).

Возможен и другой подход к рассматриваемым вопросам.

Определение функции $\Phi(g; u)$. Пусть функция $g(x)$ — неубывающая на $[a, b]$. Рассмотрим координатную систему Ouv, которая получается, поворачивая Oxy в положительную сторону на угол α, $0 < \alpha < \pi/2$. Дополненный график g функции $g(x)$ является в новой координатной системе Ouv графиком некоторой функции $\Phi(g; u)$ из класса $\mathrm{Lip}\,1$. Функция $\Phi(g; u)$ определяется аналогично и в случае, когда функция $g(x)$ убывает на $[a, b]$, только надо повернуть координатную систему в отрицательную сторону на угол α, $-\pi/2 < \alpha < 0$.

Имеют место соотношения

$$C_1(\alpha) V\Phi'(g; u) \leqq V\theta(g) \leqq C_2(\alpha) V\Phi'(g; u), \quad C_1(\alpha) > 0,$$

$$\omega(\Phi'(g; u); \delta)_L \asymp \omega(\theta(g; s); \delta)_L.$$

Следовательно, если $f^{(r)}$ монотонна, то в теоремах 1 и 2 можно заменить $\theta(f^{(r)}, s)$ с $\Phi'(f^{(r)}; u)$.

Этот подход можно применить и в случае, когда функция $g(x)$ не монотонна. Так как в этом случае определение функции $\Phi(g; u)$ значительно сложнее, чем определения $\theta(g; s)$ и $\Phi(g; u)$, для $g(x)$ монотонной, то мы его не будем здесь обсуждать.

Сформулируем некоторые другие оценки.

Теорема 3. *Если* $V_a^b f < \infty$, *то*

$$R_n(f)_L = O(n^{-1} \omega(\theta(f; s); n^{-1})_L).$$

В [6] показано, что если $V_a^b f < \infty$, то $R_n(f)_L = o(n^{-1})$.

Теорема 4. *Если* $f \in V_r$ $(r \geqq 1)$ *и* $V\theta(f^{(r)}) < \infty$, *то*

(8) $$R_n(f)_C = o(n^{-r-2}).$$

Следствие. *Если* $f \in \mathrm{Conv}_r(M, [a, b])$, *то*

(9) $$R_n(f)_C = o(n^{-r-2}).$$

Теорема 5. *Если функция* f *выпукла на* $[a, b]$ *и* $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $0 < \alpha \leqq 1$, *то*

(10) $$R_n(f)_C = o(n^{-2}).$$

Остается открытым вопрос о характеризации эффекта $o(\cdot)$ в оценках (8), (9) и (10).

В заключение отметим, что все сформулированные оценки о рациональных аппроксимациях функций справедливы и для соответствующих сплайн-аппроксимаций свободными узлами. Намеченный подход можно углубить и обобщить, чтобы получить и другие результаты в теории рациональных и сплайн-аппроксимаций. Этот подход имеет применение и в других областях теории аппроксимаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. A. Popov. Uniform rational approximation of the class V_r and its applications. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **29**, 1977, 119—129.
2. П. П. Петрушев. Равномерные рациональные аппроксимации функций класса V_r. *Мат. сборник*, **108**, 1979, № 3, 418—432.
3. Ю. А. Брудный. Рациональные аппроксимации и теоремы вложения, *Доклады АН СССР*, **247**, 1979, № 2, 681—684.
4. П. П. Петрушев. О рациональной аппроксимации функций с выпуклой производной. *Доклады БАН*, **29**, 1976, № 9, 1249—1252.
5. Бл. Сендов. Некоторые вопросы теории приближений функций и множеств в Хаусдорфовой метрике. *Успехи мат. наук*, **24**, 1969, № 5, 141—178.
6. П. П. Петрушев. Рациональные приближения функций с ограниченной вариацией в хаусдорфовой и интегральной метрике. *Сердика*, **6**, 1980, 202—210.

Единен център по математика и механика
1090 София, п. к. 373 България

Получено 7 июля 1981 г.