КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'81
София, 1983, с. 125—128

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
Sofia, 1983, p. 125—128

ОБ ОДНОМ ПРИМЕНЕНИИ СПЛАЙНОВ К РЕШЕНИЮ ДВУМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Р. В. Поляков

Резюме. В данном сообщении рассматривается один из вариантов применения интерполяционных кубических сплайнов двух переменных, построенных на прямоугольной сетке, к нахождению приближенного решения линейных двумерных интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Алгоритм нахождения приближенного решения построен на сочетании метода последовательных приближений с методом сплайн-интерполяции. Приведены достаточные условия сходимости алгоритма и получены априорные оценки погрешности.

Пусть в прямоугольнике $R=[a,b]\times[c,d]$ введена сетка $\Delta=\Delta_x\times\Delta_y$, где $\Delta_x: a=x_0<x_1<\cdots<x_N=b$, $\Delta_y: c=y_0<y_1<\cdots<y_M=d$. На этой сетке будем рассматривать кубические сплайны дефекта 1 от двух переменных, т. е. класса $C^{2,2}[R]$, где через $C^{k,m}[R]$ обозначается класс функций с непрерывными в R производными $D^{r,s}f(x,y)=\partial^{r+s}f(x,y)/\partial x^r\partial y^s$, $r\leq k$, $s\leq m$. В ячейке $R_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$ сплайны имеют вид

$$S_\Delta(x,y)=\sum_{l=0}^{3}\sum_{m=0}^{3}a_{lm}^{ij}(x-x_{i-1})^l(y-y_{j-1})^m.$$

Если в узлах сетки заданы значения функции $f(x_i,y_j)=f_{ij}$, то интерполяционным кубическим сплайном от двух переменных называется такой сплайн, что

$$S_\Delta(f;\,x_i,y_j)=f_{ij},\quad i=0,1,\ldots,N;\ j=0,1,\ldots,M. \tag{1}$$

Для построения этого сплайна используем такие краевые условия:

$$\begin{aligned}&D^{2,0}S_\Delta(f;\,x_i,y_j)=0,\quad i=0,N;\quad j=0,1,\ldots,M;\\&D^{0,2}S_\Delta(f;\,x_i,y_j)=0,\quad i=0,1,\ldots,N;\ j=0,M;\\&D^{2,2}S_\Delta(f;\,x_i,y_j)=0,\quad i=0,N;\ j=0,M.\end{aligned} \tag{2}$$

Интерполяционный кубический сплайн двух переменных, удовлетворяющий условиям (1) и (2), как известно [1—4], существует и является единственным. В каждой ячейке R_{ij}, $i=\overline{1,N}$; $j=\overline{1,M}$ мы используем следующее представление:

$$(3)\qquad S_\Delta(f;\ x, y)=(1-v)S_{j-1}(x)+vS_j(x)-k_j^2v(1-v)\,[(2-v)N_{j-1}(x)+(1+v)N_j(x)]/6,$$

где

$$S_j(x)=(1-t)\,f_{i-1,\,j}+t\,f_{i,\,j}-h_i^2t(1-t)\,[(2-t)M_{i-1,\,j}+(1+t)M_{i,\,j}]/6,$$

$$N_j(x)=(1-t)N_{i-1,\,j}+tN_{i,\,j}-h_i^2t(1-t)\,[(2-t)g_{i-1,\,j}+(1+t)g_{i,\,j}]/6,$$

$$h_i=x_i-x_{i-1},\ k_j=y_j-y_{j-1},\ t=(x-x_{i-1})/h_i,\ v=(y-y_{j-1})/k_j,$$

$$M_{i,\,j}=D^{2,0}S_\Delta(f;\ x_i, y_j),\ N_{i,\,j}=D^{0,2}S_\Delta(f;\ x_i, y_j),\ g_{i,\,j}=D^{2,2}S_\Delta(f;\ x_i, y_j),$$

$$i=0, 1, \ldots, N;\ j=0, 1, \ldots, M.$$

Ограничимся в дальнейшем равномерным разбиением по каждому направлению, т. е. когда $h_i=h=(b-a)/N$, $k_j=k=(d-c)/M$, $i=\overline{1, N}$; $j=\overline{1, M}$. Имеет место теорема

Теорема 1. *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике R, $S_\Delta(f;\ x, y)$ — ее интерполяционный кубический сплайн двух переменных, удовлетворяющий условиям* (1) *и* (2). *Тогда при* $(x, y)\in R$ *имеют место неравенства*

$$(4)\qquad |f(x, y)-S_\Delta(f;\ x, y)|\leq A[\omega(f;\ h, 0)+\omega(f;\ 0, k)],$$

$$(5)\qquad \|S_\Delta(f;\ x, y)\|\leq\|f\|+A_0[\omega(f;\ h, 0)+\omega(f;\ 0, k)],$$

где $A=37/16$, $A_0=21/16$, $\|f\|=\max\{|f(x, y)|:\ (x, y)\in R\}$, $\omega(f;\ h, 0)$, $\omega(f;\ 0, k)$ — *частные модули непрерывности функции* $f(x, y)$, *т. е.*

$$\omega(f;\ h, 0)=\sup_y\sup_{|x_1-x_2|\leq h}|f(x_1, y)-f(x_2, y)|,$$

$$\omega(f;\ 0, k)=\sup_x\sup_{|y_1-y_2|\leq k}|f(x, y_1)-f(x, y_2)|.$$

Для доказательства соотношений (4) и (5) используется представление (3), следствие Д. 1 из [3] и рассуждения из [5].

Рассмотрим линейное интегральное уравнение

$$(6)\qquad u(x, y)=\varphi(x, y)+\lambda\int_a^b\int_c^d K(x, y, s, t)u(s, t)dtds.$$

Относительно функций $\varphi(x, y)$ и $K(x, y, s, t)$ предполагаем следующее: а) $\varphi(x, y)\in C_R$, $\|\varphi\|=\max\{|\varphi(x, y)|:\ (x, y)\in R\}$; б) $K(x, y, s, t)$ — непрерывная функция своих аргументов, когда $a\leq x, s\leq b$, $c\leq y, t\leq d$;

$$(7)\qquad \|K\|=\max\{\int_a^b\int_c^d|K(x, y, s, t)|\,dtds:\ (x, y)\in R\}.$$

Приближенное решение уравнения (6) строим по алгоритму

$$(\alpha)\qquad u_{n+1}(x, y)=\varphi(x, y)+\lambda\int_a^b\int_c^d K(x, y, s, t)S_\Delta(u_n;\ s, t)dtds$$

$$u_0(x, y)=\varphi(x, y),$$

где $S_\Delta(u_n;\ s, t)$ — интерполяционный кубический сплайн двух переменных для функции $u_n(s, t)$, построенный по прямоугольной сетке Δ.

Введем обозначения

$$\delta_n(x, y) = u_n(x, y) - u_{n-1}(x, y), \quad \delta_0(x, y) = \varphi(x, y), \tag{8}$$

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n} \| \delta_i \|, \quad \| \delta_i \| = \max \{ | \delta_i(x, y) | : (x, y) \in R \}, \tag{9}$$

$$\omega^{(n)} = \omega(\delta_n;\ h, 0) + \omega(\delta_n;\ 0, k);\ \omega^{(0)} = \omega(\varphi;\ h, 0) + \omega(\varphi;\ 0, k).$$

$$\Omega_n = \sum_{i=0}^{n} \omega^{(i)}; \tag{10}$$

$$C_\theta(h, k) = \sup \{ \int_a^b \int_c^d | K(x+h, y+k, s, t) - K(x, y, s, t) | \, dtds : (x+h, y+k) \in R, (x, y) \in R \}. \tag{11}$$

В силу непрерывности функции $K(x, y, s, t)$ ясно, что $C_0(h, k) \to 0$ при $h, k \to 0$. С использованием (5), (7), (8) убеждаемся, что $\| \delta_{n+1} \| \leqq | \lambda | \| K \| \times (\| \delta_n \| + A_0 \omega^{(n)})$. Отсюда, с учетом того, что $\| \delta_n \| \geqq 0$, получаем

$$\sigma_n \leqq \| \varphi \| + | \lambda | \| K \| (\sigma_n + A_0 \Omega_n). \tag{12}$$

В силу (5), (11) и учитывая, что $\omega^{(n)} \geqq 0$, получается неравенство

$$\Omega_n \leqq \omega^{(0)} + | \lambda | \, C_0(h, k) (\sigma_n + A_0 \Omega_n). \tag{13}$$

Если обозначим $q = | \lambda | \| K \|$, $q_1 = | \lambda | \, A_0 C_0(h, k)$, то при условии, что

$$1 - q - q_1 > 0, \tag{14}$$

из (12) и (13) получаем такие неравенства:

$$\sigma_n \leqq \| \varphi \| + q \, (\| \varphi \| + A_0 \omega^{(0)}) / (1 - q - q_1), \tag{15}$$

$$\Omega_n \leqq \omega^{(0)} + q_1 (\| \varphi \| + A_0 \omega^{(0)}) / A_0 (1 - q - q_1).$$

Из (15) убеждаемся, что монотонно возрастающая последовательность $\{\sigma_n\}$ частичных сумм ряда $\Sigma_{i=0}^{\infty} | \delta_i \|$ является ограниченной и, следовательно, этот ряд сходящийся. Поэтому последовательность $\{u_n(x, y)\}$ равномерно сходится к некоторой непрерывной в R функции $u^*(x, y)$, удовлетворяющей уравнению

$$u^*(x, y) = \varphi(x, y) + \lambda \int_a^b \int_c^d K(x, y, s, t) S_\Delta(u^*;\ s, t) dtds.$$

Итак, при условии (14) алгоритм (α) является сходящимся.

При получении оценки погрешности алгоритма (α) в качестве промежуточного этапа используется приближенное решение, построенное по методу простой итерации

$$z_{n+1}(x, y) = \varphi(x, y) + \lambda \int_a^b \int_c^d K(x, y, s, t) z_n(s, t) dtds. \tag{16}$$

$$z_0(x, y) = \varphi(x, y).$$

Используя представления (α) и (16), получаем, что

$$u_n(x, y) - z_n(x, y) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda^{n-i} \int_a^b \int_c^d K_{n-i}(x, y, s, t) \left[S_\Delta(u_i\,;\ s, t) - u_i(s, t)\right] dt ds,$$

где $K_i(x, y, s, t)$ — итерированные ядра, определяемые соотношением

$$K_i(x, y, s, t) = \int_a^b \int_c^d K(x, y, \xi, \eta) K_{i-1}(\xi, \eta, s, t) d\eta d\xi,$$

$$K_1(x, y, s, t) = K(x, y, s, t).$$

Поскольку $\| K_i \| = \max \{ \int_a^b \int_c^d | K_i(x, y, s, t) | dt ds \leq \| K \|^i : \quad (x, y) \in R\}$, то с учетом (4), (10) получаем $\| u_n(x, y) - z_n(x, y) \| \leq A \Sigma_{i=0}^{n-1} q^{n-i} \omega^{(i)}$, что, в свою очередь, приводит к неравенству

$$u_n(x, y) - z_n(x, y) \| \leq A(q - q^{n+1}) \left[\omega^{(0)} + q_1 \left(\| \varphi \| + A_0 \omega^{(0)}\right) / A_0 (1 - q - q_1)\right] / (1 - q).$$

В силу неравенства $\| u - u_n \| \leq \| u - z_n \| + \| z_n - u_n \|$ окончательно получаем

$$\| u(x, y) - u_n(x, y) \| \leq \| \varphi \| q^{n+1} / (1 - q) + A(q - q^{n+1}) \left[\omega^{(0)} + q_1 \left(\| \varphi \| + A_0 \omega^{(0)}\right) / (A_0 (1 - q - q_1))\right] / (1 - q). \tag{17}$$

Второе слагаемое в правой части (17) стремится к нулю при $h, k \to 0$. Итак, имеем

Теорема 2. *Если в интегральном уравнении* (6) *функции* $\varphi(x, y)$, $K(x, y, s, t)$ *непрерывны, то при выполнении условия* (14) *последовательность* $\{u_n(x, y)\}$, *определяемая алгоритмом* (α), *равномерно сходится к непрерывной функции* $u^*(x, y)$ *и имеет место оценка* (17).

Отметим, что оценка (17) является априорной и получена в предположении, что все встречающиеся в рассуждениях интегралы вычисляются точно. В [5] оценки типа (17) имели апостериорный характер. Кроме того, результаты данной работы обобщают на двумерный случай некоторые результаты из [6], полученные в одномерном случае при более сильных ограничениях на функции φ и K.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Алберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш. Теория сплайнов и ее приложения. Москва, 1972.
2. С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин. Сплайны в вычислительной математике. Москва, 1976.
3. Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко. Методы сплайн-функций. Москва, 1980.
4. Г. И. Марчук. Методы вычислительной математики. Москва, 1980.
5. Р. В. Поляков, Е. В. Бессонов. Об одном применении бикубических сплайнов к решению двумерных интегральных уравнений второго рода с постоянными пределами. — В: Приближенные и качественные методы теории дифференциальных и дифференциально-функциональных уравнений. Киев, 1979, 64—74.
6. В. И. Тивончук, Л. Н. Шлепаков. О решении систем линейных интегральных уравнений Вольтерра и Фредгольма сплайн-итерационным методом. — В: О некоторых методах решения интегральных и дифференциальных уравнений. Киев, 1979. (Препринт ИМ АН УССР 79.6, 31—46.)

Институт физики АН УССР
252650 Киев-28 СССР

Получено 3 июня 1981 г.