КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'81
София, 1983, с. 129—133

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
Sofia, 1983, p. 129—133

МОДУЛИ ГЛАДКОСТИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА И НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В L_p $(1<p<\infty)$

В. Г. Пономаренко

Резюме. Рассматриваются измеримые 2π-периодические функции $f(x)$, принадлежащие пространству L_p $(1<p<\infty)$. Устанавливаются зависимости между модулями гладкости дробных порядков и наилучшими приближениями функции $f(x)$ тригонометрическими полиномами в L_p.

Пусть $f(x)$ — периодическая периода 2π функция, принадлежащая пространству $L_p(1\leqq p\leqq\infty)$, т. е.

$$\|f(x)\|_{L_p}=\{\int_0^{2\pi}|f(x)|^p dx\}^{1/p}<\infty \quad (1\leqq p<\infty),$$

$$|f(x)\|_{L_\infty}=\operatorname{ess}\ \sup\{|f(x)|<\infty: 0\leqq x\leqq 2\pi\}.$$

Полагая для действительных x, h и $\alpha>0$

$$\Delta_h^\alpha f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}f[x+(\alpha-k)h],$$

рассмотрим функцию $\omega_\alpha(f;t)_{L_p}=\sup\{\|\Delta_h^\alpha f(x)\|_{L_p}:|h|\leqq t\}$, которую называют модулем гладкости порядка α функции $f(x)$ в метрике $L_p(1\leqq p\leqq\infty)$ [2, с. 390].

Между наилучшими приближениями функции $f(x)$ тригонометрическими полиномами в L_p, т. е.

$$E_n(f)_{L_p}=\inf_{d_\nu}\|f(x)-\sum_{\nu=-n}^{n}d_\nu e^{i\nu x}\|_{L_p},$$

и модулями гладкости $\omega_\alpha(f;t)_{L_p}$ известны следующие зависимости.

Теорема A. *Если $f(x)\in L_p(1\leqq p\leqq\infty)$ и $\alpha>0$, то*

$$E_n(f)_{L_p}\leqq C_1(\alpha)\omega_\alpha(f;1/(n+1))_{L_p}. \tag{1}$$

Теорема B. *В предположениях теоремы A*

$$\omega_\alpha(f;1/(n+1))_{L_p}\leqq C_2(\alpha)(n+1)^{-\alpha}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{\alpha-1}E_\nu(f)_{L_p}, \tag{2}$$

$C_1(\alpha)$, $C_2(\alpha)$ — *положительные константы, зависящие от* α.

При целых $\alpha>0$ оценки (1), (2) хорошо известны [1, с. 274, 345], а для произвольных $\alpha>0$ [2, с. 398, 399].

В настоящей заметке для функций $f(x)\in L_p$ $(1<p<\infty)$ получены более точные в смысле порядка зависимости, отражающие влияние метрики пространства L_p $(1<p<\infty)$.

Теорема 1. *Если* $f(x)\in L_p$ $(1<p<\infty)$, *то* $(\alpha>0)$

$$(3)\qquad \omega_\alpha(f;1/(n+1))_{L_p}\leq C_1(\alpha,p)(n+1)^{-\alpha}\Big[\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\beta\alpha-1}E^{\beta}_{\nu-1}(f)_{L_p}\Big]^{1/\beta},\ \ \beta=\min(2,p).$$

Теорема 2. *Если* $f(x)\in L_p$ $(1<p<\infty)$, *то*

$$(4)\qquad \omega_\alpha(f;1/(n+1))_{L_p}\geq C_2(\alpha,p)(n+1)^{-\alpha}\Big[\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\alpha\gamma-1}E^{\gamma}_{\nu}(f)_{L_p}\Big]^{1/\gamma},$$

$$\alpha>0,\ \gamma=\max(2,p).$$

Неравенства (3), (4), как и в случае целых $\alpha>0$ [3, 4], в смысле порядка при $p>1$ и любом $\alpha>0$, точнее неравенств (1) и (2).

Доказательство теоремы 1. Пусть $\sum_{\nu=0}^{\infty}A_\nu(x)$ $(A_\nu(x)=a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)$ — ряд Фурье функции $f(x)\in L_p$ $(1<p<\infty)$, и

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\tilde A_\nu(x)\quad(\tilde A_\nu(x)=-b_\nu\cos\nu x+a_\nu\sin\nu x)$$

ряд Фурье функции $\tilde f(x)$. Введем функцию $g(x)=f(x)+i\tilde f(x)$ с рядом Фурье

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}c_\nu(x),\ \ c_\nu(x)=A_\nu(x)+i\tilde A_\nu(x)=c_\nu e^{i\nu x}=(a_\nu-ib_\nu)e^{i\nu x},\ \ c_0=a_0/2\,.$$

Так как $s_n(g;x)=\sum_{\nu=-n}^{n}c_\nu(x)=S_n(f;x)+i\tilde S_n(f;x)$, то в силу известного неравенства (см. [5])

$$(5)\qquad \|f(x)-S_n(f;x)_{L_p}\|\leq M(\rho)E_n(f)_{L_p}\quad(1<p<\infty)$$

следует, что при $1<p<\infty$

$$(6)\qquad \|g(x)-S_n(g;x)\|_{L_p}\leq M_1(p)E_n(f)_{L_p}.$$

Пусть $2^{-m-1}\leq h\leq 2^{-m}$. С помощью неравенства Минковского получим, благодаря (6), что

$$(7)\qquad \|\Delta_h^\alpha f(x)\|_{L_p}\leq\|\Delta_h^\alpha g(x)\|_{L_p}\leq M(\alpha,p)E_{2^m-1}(f)_{L_p}+\sigma(f),$$

$$\sigma(f)=\|\Delta_h^\alpha S_{2^m-1}(g;x)\|_{L_p}.$$

Нетрудно показать, что

$$(8)\qquad \Delta_h^\alpha S_{2^m-1}(g;x-\alpha h/2)=\sum_{\nu=-(2^m-1)}^{2^m}(2i\sin(\nu h/2))^\alpha\cdot c_\nu(x).$$

Тогда, в силу известного соотношения [5, с. 335],

$$(9)\qquad B(p)\Big\|\Big(\sum_{\mu=1}^{\infty}\Delta_\mu^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L_p}\leq\|f(x)\|_{L_p}\leq C(p)\Big\|\Big(\sum_{\mu=1}^{\infty}\Delta_\mu^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L_p},$$

$$\Delta_\mu = \sum_{\nu=2^{\mu-1}}^{2^\mu - 1} A_\nu(x), \quad 1<p<\infty,$$

получим

$$(10) \qquad \sigma(f) \leq C_1(\alpha, p) \| (\sum_{\mu=1}^{m} | \sum_{\nu=2^{\mu-1}}^{2^\mu-1} A_\nu(x) \sin^\alpha \nu h/2 |^2)^{1/2} \|_{L_p}.$$

Так как при $2^{-m-1} \leq h \leq 2^{-m}$, $\mu=1, 2, \ldots, m$,

$$\sum_{\nu=2^{\mu-1}}^{2^\mu-1} | \sin^\alpha \nu h/2 - \sin^\alpha (\nu+1)h/2 | \leq 2^{\mu\alpha+1} h^\alpha,$$

то, применив преобразование Абеля к $\sum_{\nu=2^{\mu-1}}^{2^\mu-1} A_\nu(x) \sin^\alpha(\nu h/2)$, с помощью неравенства Минковского, используя оценку (5), будем иметь

$$\| \sum_{\nu=2^{\mu-1}}^{2^\mu-1} A_\nu(x) \sin^\alpha(\nu h/2) \|_{L_p} \leq B_1(\alpha, p) E_{2^\mu-1}(f)_{L_p} h^\alpha 2^{\mu\alpha}.$$

В силу монотонного убывания $\{E_n(f)_{L_p}\}$ отсюда следует, что для $1<p<\infty$

$$(11) \qquad \| \sum_{\nu=2^{\mu-1}}^{2^\mu-1} A_\nu(x) \sin^\alpha(\nu h/2) \|_{L_p}^p \leq B_2(\alpha, p) h^{\alpha p} \sum_{\nu=2^{\mu-1}}^{2^\mu-1} E_{\nu-1}^p(f)_{L_p} \nu^{p\alpha-1}.$$

Пусть $1<p\leq 2$. Так как $p/2 \leq 1$, то из (10), благодаря (11), получим

$$\sigma(f) \leq C_2(\alpha, p) \{ \sum_{\mu=1}^{m} \| \sum_{\nu=2^{\mu-1}}^{2^\mu-1} A_\nu(x) \sin^\alpha(\nu h/2) \|_{L_p}^p \}^{1/p}$$

$$\leq C_3(\alpha, p)(n+1)^{-\alpha} \{ \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\alpha p-1} E_{\nu-1}^p(f)_{L_p} \}^{1/p}.$$

Так как, кроме того, при $1<\gamma<\infty$

$$(12) \qquad E_{2^m-1}(f)_{L_p} \leq C(\alpha) n^{-\alpha} \{ \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\gamma\alpha-1} E_{\nu-1}^\gamma (f)_{L_p} \}^{1/\gamma},$$

то из (7) и полученных оценок следует, что при $1<p\leq 2$ и $2^{-m-1} \leq h < 2^{-m} < (n+1)^{-1}$

$$\omega_\alpha(f; 1/(n+1))_{L_p} \leq C_4(\alpha, p)(n+1)^{-\alpha} \{ \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\alpha p-1} E_{\nu-1}^p(f)_{L_p} \}^{1/p}.$$

Если $2 \leq p < \infty$, то применяя обобщенное неравенство Минковского к правой части (10), получим

$$\sigma(f) \leq C_5(\alpha, p) \{ \sum_{\mu=1}^{m} \| \sum_{\nu=2^{\mu-1}}^{2^\mu-1} A_\nu(x) \sin^\alpha(\nu h/2) \|_{L_p}^2 \}^{1/2}.$$

С помощью оценки (11) отсюда находим

$$\sigma(f) \leq C_6(\alpha, p)(n+1)^{-\alpha} \{ \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{2\alpha-1} E_{\nu-1}^2(f)_{L_p} \}^{1/2}.$$

Далее, используя (12) при $\gamma=2$, получим из (7), что для $2<p<\infty$ $(\alpha>0)$

$$\omega_\alpha(f;1/(n+1))_{L_p}\leq C_7(\alpha,p)(n+1)^{-\alpha}\{\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{2\alpha-1}E^2_{\nu-1}(f)_{L_p}\}^{1/2},$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 2. Пусть $2^m\leq n<2^{m+1}$ и $h=(n+1)^{-1}$. Рассмотрим при любом $1<\gamma<\infty$ величину

$$\sigma_{\alpha,\gamma}(f)=\{\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\gamma\alpha-1}n^{-\gamma\alpha}E^{\gamma}_{\nu-1}(f)_{L_p}\}^{1/\gamma}$$

в силу (9),

$$\sigma_{\alpha,\gamma}(f)\leq M(\alpha,\gamma)\{\sum_{\nu=1}^{m+1}2^{\gamma\alpha\nu}n^{-\gamma\alpha}\|(\sum_{\mu=\nu}^{\infty}\Delta^2_\mu)^{1/2}\|^{\gamma}\}^{1/\gamma}. \tag{13}$$

Пусть $1<p\leq 2$, $\gamma=2$. По обобщенному неравенству Минковского получаем из (12)

$$\sigma_{\alpha,2}(f)\leq M(\alpha,2)\{\int_0^{2\pi}(\sum_{\nu=1}^{m+1}2^{2\nu\alpha}n^{-2\alpha}\sum_{\mu=\nu}^{\infty}\Delta^2_\mu)^{p/2}dx\}^{1/p}. \tag{14}$$

К конечной сумме, стоящей в скобках под интегралом, применим преобразование Абеля. Тогда

$$\sigma_{\alpha,2}(f)\leq M_1(\alpha,2)\{[\int_0^{2\pi}(\sum_{\nu=1}^{m}2^{2\nu\alpha}n^{-2\alpha}\Delta^2_\nu)^{p/2}dx]^{1/p}+[\int_0^{2\pi}(\sum_{\mu=m+1}^{\infty}\Delta^2_\mu)^{p/2}dx]^{1/p}\} \tag{15}$$
$$=M_1(\alpha,2)\{J_1+J_2\}.$$

Оценим сначала J_2. В силу (6), (9) и неравенства (1)

$$J_2\leq M_2(\alpha,p)E_n(f)_{L_p}\leq M_3(\alpha,p)\omega_\alpha(f;1/(n+1))_{L_p}. \tag{16}$$

Рассмотрим теперь $J_1=\{\int_0^{2\pi}(\sum_{\nu=1}^{m}2^{2\nu\alpha}n^{-2\alpha}\Delta^2_\nu)^{p/2}dx\}^{1/p}$. Применяя (9), получим, что

$$J_1\leq M_4(\alpha,p)\{\int_0^{2\pi}|\sum_{\nu=1}^{m}2^{\nu\alpha}n^{-\alpha}\Delta_\nu|^p dx\}^{1/p}. \tag{17}$$

Для оценки правой части (17) дважды воспользуемся известной теоремой Марцинкевича [5, с. 346]. Тогда из (17), принимая во внимание (8), получим

$$J_1\leq M_5(\alpha,p)\|\sum_{\nu=1}^{n}\nu^\alpha n^{-\alpha}A_\nu(x)\|_{L_p}\leq M_6(\alpha,p)\|\Delta^\alpha_h S_n(f;x)\|_{L_p} \tag{18}$$
$$\leq M_7(\alpha,p)\|\Delta^\alpha_h f(x)\|_{L_p}\leq M_8(\alpha,p)\omega_\alpha(f;1/(n+1))_{L_p}.$$

Из оценок (15), (16), (18), в силу (14), вытекает утверждение теоремы для $1<p\leq 2$.

Пусть $2<p<\infty$ и $\gamma=p$. Из (13) с помощью (9) получим, учитывая, что $2/p<1$,

$$\sigma_{\alpha,p}(f)\leq M_9(\alpha,p)\{\int_0^{2\pi}(\sum_{\nu=1}^{m+1}2^{2\nu\alpha}n^{-2\alpha}\sum_{\mu=\nu}^{\infty}\Delta^2_\mu)^{p/2}dx\}^{1/p}. \tag{19}$$

Выражение справа в (19) такое же, как и в (14), поэтому, повторив рассуждения, использованные для оценки $\omega_\alpha(f;1/(n+1))_{L_p}$ в случае $1<p\leq 2$, получим утверждение теоремы при $2<p<\infty$.

Из теорем A, B, 1, 2 и свойств модулей гладкости при любом $\alpha>0$ (см. [2]) вытекают следующие соотношения между модулями гладкости различных порядков.

Следствие. *Если $f(x)\in L_p(1<p<\infty)$, то при $0<\beta<\alpha$ и $0<h\leq 2^{-1}$ справедливы неравенства*

$$\omega_\beta(f;h)_{L_p}\leq B(\alpha,p)h^\beta\{\int_h^1\omega_\alpha^\gamma(f;t)_{L_p}t^{-(\beta\gamma+1)}dt\}^{1/\gamma},\ \gamma=\min(2,p); \tag{20}$$

$$\omega_\beta(f;h)_{L_p}\geq C(\alpha,p)h^\beta\{\int_h^1\omega_\alpha^\delta(f;t)_{L_p}t^{-(\beta\delta+1)}dt\}^{1/\delta},\ \delta=\max(2,p). \tag{21}$$

Неравенства (20), (21) при натуральных α, β получены Тиманом [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ф. Тиман. Теория приближения функций действительного переменного. Москва. 1960.
2. R. Taberski. Differences, moduli and derivatives of fractional orders. *Rocz. Pol. tow. mat., ser. 1*, **19**, 1977, № 2, 389—400.
3. М. Ф. Тиман. Обратные теоремы кооструктивной теории функций в пространствах L_p. *Матем. сборник*, **46**, 1958, № 1, 125—132.
4. М. Ф. Тиман. О теореме Джексона в пространствах L_p. *Укр. мат. журнал*, **1**, 1966 134—137.
5. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды, Т. 2. Москва, 1965.
6. М. Ф. Тиман. Исследование свойств функций с заданными наилучшими приближениями (Автореферат диссертации. ЛГУ, Ленинград, 1969.)

Ул. Фурманова 8|76
320095 Днепропетровск СССР

Получено 10 июля 1981 г.