КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'81
София, 1983, с. 134—138

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
Sofia, 1983, p. 134—138

АППРОКСИМАЦИЯ МНОГОЧЛЕНАМИ НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

М. К. Потапов

Резюме. Приводятся некоторые результаты советских математиков о приближении алгебраическими многочленами функций, заданных на конечном отрезке вещественной оси.

1. Пусть $\mathscr{E}_n(F)_{C^*}$ — наилучшее приближение в равномерной метрике непрерывной, 2π — периодической функции $F(t)$ при помощи тригонометрических полиномов порядка не выше, чем $n-1$, а $E_n(f)_{C[a,\,b]}$ — наилучшее приближение на отрезке $[a, b]$ в равномерной метрике непериодической непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$ при помощи алгебраических многочленов степени не выше, чем $n-1$.

Еще в начале века было выяснено, что для периодических функций условие

$$\mathscr{E}_n(F)_{C^*}=O(n^{-\gamma}),\ 0<\gamma<1,$$

является конструктивной характеристикой класса функций, удовлетворяющих условию $\mathrm{Lip}\,\gamma$, а для непериодических функций условие

$$E_n(f)_{C[ab]}=O(n^{-\gamma}),\ 0<\gamma<1,$$

не является конструктивной характеристикой класса функций, удовлетворяющих на всем отрезке $[a, b]$ условию $\mathrm{Lip}\,\gamma$.

Поэтому встали вопросы о выяснении конструктивной характеристики непериодических функций, удовлетворяющих на всем отрезке $[a, b]$ условию $\mathrm{Lip}\,\gamma$, и о выяснении структурной характеристики класса непериодических функций, удовлетворяющих условию $E_n(f)_{C[a,\,b]}=O(n^{-\gamma})$. Эти вопросы долгое время оставались открытыми.

Лишь в 1946 г. Никольский [1] впервые обнаружил, что непрерывную на конечном отрезке функцию можно приблизить алгебраическими многочленами так, что при сохранении порядка наилучшего приближения во внутренних точках отрезка порядок приближения у концов отрезка будет лучше. Это обстоятельство и послужило основанием для высказанной С. М. Никольским гипотезы о том, что конструктивная характеристика непериодических функций, заданных на конечном отрезке, должна учитывать положение точки на отрезке. Эта гипотеза получила свое подтверждение в работах Тимана [2] (прямое утверждение) и Дзядыка

[3] (обратное утверждение). А именно, ими было, в частности, показано: для того, чтобы непериодическая непрерывная на отрезке $[-1,1]$ функция $f(x)$ удовлетворяла на всем отрезке $[-1,1]$ условию $\mathrm{Lip}\,\gamma$, $0<\gamma<1$, необходимо и достаточно, чтобы для любого натурального n нашелся алгебраический многочлен $P_n(x)$ степени не выше, чем $n-1$ такой, что

$$|f(x)-P_n(x)|\leqq Kn^{-\gamma}(\sqrt{1-x^2}+1/n)^{\gamma},$$

где K — некоторая положительная константа, не зависящая от n и x.

После этого результата возник вопрос, а не является ли условие: для любого натурального n существует алгебраический многочлен $P_n(x)$, степени не выше, чем $n-1$, такой, что

$$\left\|\frac{f(x)-P_n(x)}{(\sqrt{1-x^2}+1/n)^{\gamma}}\right\|_{\mathscr{L}_{p[-1,1]}}\leqq\frac{K}{n^{\gamma}},\ 1\leqq p<\infty,\ 0<\gamma<1, \tag{1}$$

конструктивной характеристикой класса непериодических функций, удовлетворяющих на отрезке $[-1,1]$ условию Липшица порядка γ в метрике $\mathscr{L}_p$, т. е. условию $\mathrm{Lip}\,(\gamma,p,[-1,1])$? Ответ на этот вопрос был получен Моторным [4], который показал, что условие (1) не является конструктивной характеристикой класса $\mathrm{Lip}\,(\gamma,p,[-1,1])$; им было показано, что если $f(x)\in\mathrm{Lip}\,(\gamma,p,[-1,1])$, $0<\gamma<1$, то для любого натурального n найдется алгебраический многочлен $P_n(x)$ степени не выше, чем $n-1$, такой, что

$$\left\|\frac{f(x)-P_n(x)}{(\sqrt{1-x^2}+1/n)^{\gamma}}\right\|_{\mathscr{L}_{p[-1,1]}}\leqq\frac{K(\ln n)^{1/p}}{n^{\gamma}},$$

где K — некоторая положительная константа, не зависящая от n; при этом на всем классе $\mathrm{Lip}(\gamma,p,[-1,1])$ нельзя заменить $(\ln n)^{1/p}$ на более медленно растущую с ростом n функцию. В этой же работе показано, что конструктивная характеристика класса $\mathrm{Lip}\,(\gamma,p[-1,1])$ может быть дана в терминах приближения функций из этого класса кусочно-полиномиальными функциями.

Естественно встал вопрос о выяснении структурной характеристики класса функций, удовлетворяющих условию (1).

Отмеченные выше вопросы о выяснении структурных характеристик являются частными случаями более общего вопроса о выяснении структурных характеристик функций, удовлетворяющих условию:

для любого натурального n существует алгебраический многочлен $P_n(x)$ степени не выше, чем $n-1$, такой, что

$$\|[f(x)-P_n(x)]\,(1-x)^{\nu}(1+x)^{\mu}(1-x+n^{-2})^{\rho_1}(1+x+n^{-2})^{\rho_2}\|_X\leqq M\varphi(n),$$

где ν, μ, ρ_1, ρ_2 — некоторые фиксированные числа, X — либо пространство $\mathscr{L}_p[-1,1]$, $1\leqq p<\infty$, либо пространство $C[-1,1]$, M — некоторая положительная, независящая от n константа, а $\varphi(n)$ — некоторая неотрицательная функция.

Ответу на этот вопрос в различных частных случаях посвящено много работ, отметим, например, работы [5—18].

2. Структурные характеристики, дающие ответ на поставленный выше вопрос, часто даются в терминах обобщенных модулей гладкости, в которых участвуют функции обобщенного сдвига.

Функцию обобщенного сдвига $f(\overline{x+h}, \alpha, \beta)$. ($h=\sin t$, $\alpha \geqq \beta \geqq -1/2$) определим следующим образом:

1) при $\alpha=\beta=-1/2$ это есть функция обобщенного сдвига типа Чебышева:

$$f(\overline{x+h}, -1/2, -1/2)=\frac{1}{2}\left[f(x\cos t+\sqrt{1-x^2}\sin t)+f(x\cos t-\sqrt{1-x^2}\sin t)\right];$$

2) при $\alpha=\beta=0$ это есть функция обобщенного сдвига типа Лежандра:

$$f(\overline{x+h}, 0, 0)=\pi^{-1}\int_{-1}^{1} f(x\cos t+z\sqrt{1-x^2}\sin t)(1-z^2)^{-1/2}\,dz;$$

3) при $\alpha=\beta>-1/2$ это есть функция обобщенного сдвига типа Гегенбауэра:

$$f(\overline{x+h}, \alpha, \alpha)=(1/\mu(\alpha))\int_{-1}^{1} f(x\cos t+z\sqrt{1-x^2}\sin t)(1-z^2)^{\alpha-1/2}\,dz;$$

(в частном случае при $\alpha=\beta=0$ это есть функция обобщенного сдвига типа Лежандра);

4) при $\alpha>\beta=-1/2$ это есть функция обобщенного сдвига типа Якоби — Чебышева:

$$f(\overline{x+h}, \alpha, -1/2)=(1/\mu(\alpha))\int_{-1}^{1} f(x\cos t+z\sqrt{1-x^2}\sin t$$

$$-(1-z^2)(1-x)\sin^2\frac{t}{2})(1-z^2)^{\alpha-1/2}\,dz;$$

5) при $\alpha>\beta>-1/2$ это есть функция обобщенного сдвига типа Якоби:

$$f(\overline{x+h}, \alpha, \beta)=(1/\mu(\alpha,\beta))\int_{0}^{1}\int_{-1}^{1} f(x\cos t+yz\sqrt{1-x^2}\sin t$$

$$-(1-y^2)(1-x)\sin^2\frac{t}{2})(1-y^2)^{\alpha-\beta-1}y^{2\beta+1}(1-z^2)^{\beta-1/2}\,dz\,dy,$$

где $\mu(\alpha)=\int_{-1}^{1}(1-y^2)^{\alpha-1/2}\,dy$, $\mu(\alpha,\beta)=\int_{0}^{1}\int_{-1}^{1}(1-y^2)^{\alpha-\beta-1}y^{2\beta+1}(1-z^2)^{\beta-1/2}\,dz\,dy$.

Заметим, что функции обобщенного сдвига естественно возникают при решении задачи о структурной характеристике функций, имеющих данный порядок наилучшего приближения алгебраическими многочленами. Именно такой ее вид связан со свойствами многочленов Якоби, используемых при решении этой задачи. Полный ответ на сформулированный выше общий вопрос о выяснении структурных характеристик функций с данным порядком приближения ее алгебраическими многочленами дан в отмеченных выше работах. Здесь мы приведем лишь несколько частных утверждений, которые дают представление о результатах, содержащихся в этих работах.

Утверждение 1. Пусть $f(x)\in\mathscr{L}_p[-1,1]$, $1\leqq p<\infty$, $0<\gamma<1$, тогда условие: $E_n(f)_{\mathscr{L}_p[-1,1]}=O(n^{-\gamma})$, где $E_n(f)_{\mathscr{L}_p[-1,1]}=\inf\limits_{P_n}\|f(x)-P_n(x)\|_{\mathscr{L}_p[-1,1]}$, равносильно для любых α и β таких, что $\alpha \geqq \beta \geqq 1/2p - 1/2$, условию $\| f(x) - f(\overline{x+h}, \alpha, \beta) \|_{\mathscr{L}_p[-1,1]} = O(|t|^{\gamma})$.

Утверждение 2. Пусть $f(x) \in C[-1, 1]$, $0 < \gamma < 1$, тогда условие

$$E_n(f)_{C[-1,1]} = O(n^{-\gamma}) \tag{2}$$

равносильно для любых α и β таких, что $\alpha \geqq \beta \geqq -1/2$, условию $|f(x) - f(\overline{x+h}, \alpha, \beta)| = O(|t|^{\gamma})$.

Кроме того, условие (2) равносильно условию: для любого $x \in [-1, 1]$

$$\sup \{ |f(x) - f(x+h)| \leqq \mu \left(\frac{\delta}{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{\delta}} \right)^{\gamma}; \ |h| \leqq \delta, \ |x+h| \leqq 1 \},$$

где μ — некоторая положительная константа, не зависящая от x и δ.

Утверждение 3. Пусть $f(x) \in \mathscr{L}_p[-1, 1]$, $1 \leqq p < \infty$, $0 < \gamma < 1$, тогда условие:

для любого натурального n существует алгебраический многочлен $P_n(x)$ степени не выше, чем $n-1$, такой, что

$$\| (f(x) - P_n(x)) (\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n})^{-\gamma} \|_{\mathscr{L}_p[-1,1]} = O(n^{-\gamma}),$$

равносильно, для любых α и β, таких, что $\alpha \geqq \beta \geqq 1/2p - 1/2$, условию

$$\| f(x) - f(\overline{x+h}; \alpha, \beta)) (\sqrt{1-x^2} + |t|)^{-\gamma} \|_{\mathscr{L}_p[-1,1]} = O(|t|^{\gamma}).$$

Утверждение 4. Пусть $f(x) \in C[-1, 1]$, $0 < \rho_1 < 1$, $0 < \rho_1 + \rho_2 < 2$, тогда условие:

для любого натурального n существует алгебраический многочлен $P_n(x)$ степени не выше, чем $n-1$, такой, что

$$|f(x) - P_n(x)| \leqq K n^{-\rho_1} (\sqrt{1-x^2} + 1/n)^{\rho_2}, \tag{3}$$

где K — некоторая положительная, не зависящая от n и x константа, равносильно для любых α и β, таких, что $\alpha \geqq \beta \geqq -1/2$, условию $|f(x) - f(\overline{x+h}; \alpha, \beta)| \leqq M_1 |t|^{\rho_1} (\sqrt{1-x^2} + |t|)^{\rho_2}$, где M_1 — некоторая положительная независящая от t и x константа.

Кроме того, условие (3) равносильно условию: для любого $x \in [-1, 1]$

$$\sup \{ |f(x) - f(x+h)| : |h| \leqq \delta, \ |x+h| \leqq 1 \} \leqq M_2 \delta^{\rho_1} (\sqrt{1-x^2} + \sqrt{\delta})^{\rho_2 - \rho_1},$$

где M_2 — некоторая положительная, не зависящая от δ и x константа.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Никольский. О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица. *Изв. АН СССР, Сер. матем.*, 10, 1946, № 4, 295—322.
2. А. Ф. Тиман. Приближение функций, удовлетворяющих условию Липшица, обыкновенными многочленами. *Доклады АН СССР*, 77, 1951, 969—972.

3. В. К. Дзядык. О конструктивной характеристике функций, удовлетворяющих условию $\mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0<\alpha<1)$ на конечном отрезке вещественной оси. *Изв. АН СССР, Сер. матем.*, **20**, 1956, 623—642.

4. В. П. Моторный. Приближение функций алгебраическими полиномами в метрике $\mathscr{L}_p$. *Изв. АН СССР, Сер. матем.*, **35**, 1971, 874—899.

5. М. К. Потапов. Некоторые вопросы наилучшего приближения в метрике $\mathscr{L}_p$. Диссертация, Москва, 1956.

6. Г. К. Лебедь. Некоторые вопросы приближения функций одной переменной алгебраическими многочленами. *Доклады АН СССР*, **118**, 1958, № 2, 239—242.

7. М. К. Потапов. О приближении непериодических функиий алгебраическими полиномами. *Вестник МГУ*, 1960, № 4, 14—25.

8. А. Л. Фуксман. Структурная характеристика функций, для которых $E_n(f) \leq Mn^{-(k+\alpha)}$. *Успехи мат. наук*, **20**, 1965, № 4, 187—190.

9. Г. В. Жидков. Конструктивная характеристика одного класса непериодических функций. *Доклады АН СССР*, **169**, 1966, № 5, 1002—1005.

10. С. З. Рафальсон. О приближении суммами Фурье—Якоби. *Изв. ВУЗ., Матем.*, 1968, № 4, 54—62.

11. Ар. С. Джафаров. Прямые и обратные теоремы теории наилучших приближений функций алгебраическими многочленами. *Доклады АН СССР*, **187**, 1969, № 4, 719—722.

12. Б. А. Халилова. О приближении непериодических функций в метрике $\mathscr{L}_p$ с весом. Деп. № 356—74, 1974.

13. М. К. Потапов. О структурных и конструктивных характеристиках некоторых классов функций. *Труды МИ АН СССР*, **131**, 1974, 211—231.

14. М. К. Потапов. О структурных характеристиках классов функций с данным порядком наилучшего приближения. *Труды МИ АН СССР*, **134**, 1975, 260—277.

15. М. К. Потапов. О приближении многочленами Якоби. *Вестник МГУ* 1977, **№ 5**, 70—82.

16. Е. В. Ржавинская. О приближении непериодических функций алгебраическими полиномами. Деп. № 2968—79, 1979.

17. М. К. Потапов. Об условиях совпадения некоторых классов функций. *Труды семинара им. И. Г. Петровского*, **6**, 1981, 223—238.

18. М. К. Потапов. Об аппроксимации в метрике C алгебраическими многочленами. — В: Всесоюзный симпозиум по теории аппроксимации функций в комплексной области (тезисы докладов). Уфа, 1980 с., 113.

МГУ, Механико-математический факультет
117234 Москва СССР

Получено 6 июля 1981 г.