КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'81
София, 1983, с. 139—143

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
Sofia, 1983, p. 139—143

ОПЕРАТОР ОБОБЩЕННОГО СДВИГА, СВЯЗАННЫЙ С ТЕОРИЕЙ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

С. З. Рафальсон

1. Пусть $\{\omega_n(x)\}_0^\infty$, $\{\varphi_n(x)\}_0^\infty$ — ортонормированные на $[-1, 1]$ с весами $p(x)$ и $p(x)(1-x)$ соответственно системы алгебраических многочленов; $p(x)>0$ всюду на $[-1, 1]$, кроме, быть может, множества лебеговой меры 0; $\omega_n(x)=a_n x^n+\cdots$, $\varphi_n(x)=b_n x^n+\cdots$, $(a_n, b_n>0, n=0, 1 \ldots)$. Предположим, что $\|\omega_n\|_{C[-1,1]}=\omega_n(1)$, $n=0, 1, \ldots$ Обозначим $L_{q\,;\,p(.)}$ $(1\leqq q<\infty)$ пространство функций f, измеримых на $[-1, 1]$, и таких, что $\|f\|_{q\,;\,p(.)} \overset{\text{def}}{=} \{\int_{-1}^1 p(x)\,|f(x)|^q dx\}^{1/q}<\infty$; $L_{\infty\,;\,p(.)}=C[-1, 1]$. Полагаем также $L_{1\,;\,p(.)}=L_{p(.)}$.

Для $f\in L_{p(.)}$ обозначим $\{c_k(f)\}_0^\infty$ ее коэффициенты Фурье по системе $\{\omega_k\}_0^\infty$. Предположим, что $\forall t\in[0, \pi]$ на $L_{p(.)}$ задан оператор $f\to f_t$, обладающий свойствами:

1) $\forall f\in L_{q\,;\,p(.)}$ $(q\in[1, +\infty])$, $\forall t\in[0, \pi]$

$$f_t\in L_{q\,;\,p(.)},\ \|f_t\|_{q\,;\,p(.)}\leqq\|f\|_{q\,;\,p(.)};$$

2) $\forall f\in L_{p(.)}$, $\forall t\in[0, \pi]$

$$c_k(f_t)=c_k(f)\,\omega_k(\cos t)/\omega_k(1),\quad k=0, 1, \ldots$$

Из свойства 2) следует, что если формально $f\sim\Sigma_{k=0}^\infty c_k(f)\omega_k$, то $\forall t\in[0, \pi]$ также формально

$$f_t\sim\Sigma_{k=0}^\infty c_k(f)\,.\,\omega_k(\cos t)\omega_k/\omega_k(1).$$

Оператор $f\to f_t$ является оператором типа оператора сдвига. Цель настоящего сообщения — показать, какие вопросы теории ортогональных многочленов могут быть решены с помощью этого оператора.

2. Обобщенная свертка, ее свойства. Положим $\forall\ \varphi, g\in L_{p(.)}$ $(\varphi*g)(x)=\int_{-1}^1 \varphi_{\arccos z}(x)\cdot g(z)\cdot p(z)\,dz$; функцию $\varphi*g$ будем называть обобщенной сверткой (о. с.) функций φ и g. Отметим некоторые свойства о. с.:

1) при $p^{-1}+q^{-1}>1$ $(1\leqq p, q<\infty)$, $r^{-1}=p^{-1}+q^{-1}-1$

$$\|\varphi*g\|_{r\,;\,p(.)}\leqq\|\varphi\|_{p\,;\,p(.)}\cdot\|g\|_{q\,;\,p(.)};$$

2) $\forall\, \varphi,\ g \in L_{p(\cdot)},\ n=0,\ 1, \ldots,\ c_n(\varphi * g)=c_n(\varphi)c_n(g)\,.\,(\omega_n(1))^{-1}$;

отсюда непосредственно следует коммутативность и ассоциативность о. с.:

3) если $p,\ q \geqq 1,\ p^{-1}+q^{-1}=1,\quad g \in L_{q\,;\,p(\cdot)}$, то

$$\sup\{\|\varphi * g\|_c :\ \|\varphi\|_{p\,;\,p(\cdot)} \leqq 1\} \tag{1}$$

$$=\sup\{|(\varphi * g)(1)| :\|\varphi\|_{p\,;\,p(\cdot)} \leqq 1\}=\|g\|_{q\,;\,p(\cdot)};$$

4) для того, чтобы для $f \in L_{p(\cdot)}$ $\Sigma_{n=0}^{\infty}|c_n(f)|\,\omega_n(1)<\infty$, необходимо и достаточно, чтобы $f=\varphi * g$, где $\varphi,\ g \in L_{2\,;\,p(\cdot)}$; это аналог известного критерия М. Рисса абсолютной сходимости тригонометрического ряда Фурье.

3. Одна формула для частной суммы ряда Фурье по ортогональным многочленам и следствия из нее.

Теорема 1. *Пусть* $f \in L_{p(\cdot)}$. *Для* $S_n^{(p(\cdot))}(f; x)=\Sigma_{k=0}^{n} c_k(f)\,\omega_k(x)$ *почти всюду на* $[-1,\ 1]$ *справедливо равенство*

$$S_n^{(p(\cdot))}(f;\ x)=a_n b_n^{-1}\omega_n(1)\,.\,(f * \varphi_n)(x). \tag{2}$$

Положим $\forall\, q \in [1,\ +\infty],\ n=0,\ 1,\ 2, \ldots,\ x \in [-1,\ 1]$,

$$L_{n,\,q}^{(p(\cdot))}(x)=\sup\{|S_n^{(p(\cdot))}(f;\ x)| :\ \|f\|_{q\,;\,p(\cdot)} \leqq 1\}.$$

$L_{n,\,q}^{(p(\cdot))}(x)$ назовем q-функцией Лебега оператора $S_n^{(p(\cdot))}$. Из (1) и (2) вытекает

Теорема 2. *Справедливы равенства*

$$\|S_n^{(p(\cdot))}\|_{L_{q\,;\,p(\cdot)}\to C} \overset{\text{def}}{=} \sup\{\|S_n^{(p(\cdot))}(f)\|_C :\ \|f\|_{q\,;\,p(\cdot)} \leqq 1\}=\|L_{n,\,q}^{(p(\cdot))}\|_C$$

$$=L_{n,\,q}^{(p(\cdot))}(1)=b_n^{-1}a_n\omega_n(1)\,\|\varphi_n\|_{s\,;\,p(\cdot)},\quad 1 \leqq q \leqq \infty,\quad s=q/(q-1).$$

Тем самым, во-первых, утверждается то, что q-функция Лебега достигает наибольшего значения в точке $x=1$; во-вторых, получено явное выражение для нормы $S_n^{(p(\cdot))}$ как оператора из $L_{q\,;\,p(\cdot)}$ в C.

Рассмотрим важный частный случай $p(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta},\ \alpha,\ \beta \geqq -1/2$. Тогда $\{\omega_n(x)\}_0^{\infty}=\{J_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)\}_0^{\infty}$ — ортонормированная на $[-1,\ 1]$ с весом $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ система многочленов Якоби. Для $f_t(x)$ можно в данном случае указать явные выражения. Если $\alpha=\beta>-1/2$, то

$$f_t(x)=\Gamma(2\alpha+1).2^{-2\alpha}\Gamma^{-2}(\alpha+1/2)\int_0^{\pi} f(x\cos t+\sqrt{1-x^2}\sin t\cos\lambda)\sin^{2\alpha}\lambda\, d\lambda; \tag{3}$$

если $\alpha>\beta=-1/2$, то

$$f_t(x)=(\mu(\alpha))^{-1}\int_{-1}^{1} f(x\cos t+r\sin t\sqrt{1-x^2} \tag{4}$$

$$-(1-r^2)(1-x)\sin^2(t/2)).(1-r^2)^{\alpha-1/2}\,dr,\ \mu(\alpha)=\int_{-1}^{1}(1-r^2)^{\alpha-1/2}\,dr;$$

если $\alpha=\beta=-1/2$, то

$$f_t(x)=(1/2)\,[f(x\cos t+\sin t\sqrt{1-x^2})+f(x\cos t-\sin t\sqrt{1-x^2})]; \tag{5}$$

если $\alpha>\beta>-1/2$, то

$$(6)\qquad f_t(x)=(\mu(\alpha,\ \beta))^{-1}\int_0^1(1-r^2)^{\alpha-\beta-1}r^{2\beta+1}\,dr\int_{-1}^1 f\,[x\cos t+rz\sin t\sqrt{1-x^2}-(1-r^2)(1-x)\sin^2(t/2)](1-z^2)^{\beta-1/2}\,dz,$$

$$\mu(\alpha,\ \beta)=\int_0^1(1-r^2)^{\alpha-\beta-1}r^{2\beta+1}dr\int_{-1}^1(1-z^2)^{\beta-1/2}dz.$$

В каждом из этих случаев можно проверить, что оператор f_t удовлетворяет условиям 1), 2) п. 1. Отметим, что в случае $\alpha=\beta=0$ функция f_t введена в работе [4], в случае $\alpha=\beta>-1/2$ — в [8], в случае $\alpha>\beta=-1/2$ и $\alpha=\beta=-1/2$ — в [7], в случае $\alpha>\beta>-1/2$ — в [6] (см. равенства (3), (4), (5), (6), соответственно). Во всех указанных работах функция f_t связывалась с вопросами приближения функций алгебраическими многочленами в метриках $L_{q\,;\,\alpha,\,\beta}\overset{\text{def}}{=\!=}L_{q\,;\,(1-x)^\alpha(1+x)^\beta}$. Обозначив для данного случая $S_n^{(p(\cdot))}=S_n^{(\alpha,\,\beta)}$, $L_{n,\,q}^{(p(\,\cdot\,))}=L_{n,\,q}^{(\alpha,\,\beta)}$, получим как следствие теоремы 2 следующую теорему.

Теорема 3. *При* $\alpha\geqq\beta$, $p\in[1,\ +\infty]$, $n=0,\ 1,\ldots$

$$\|S_n^{(\alpha,\,\beta)}\|_{L_{q\,;\,\alpha,\ \beta}\to C}=\|L_{n,\,q}^{(\alpha,\,\beta)}\|_C=L_{n,\,q}^{(\alpha,\,\beta)}(1)=\mu(n,\alpha,\beta)\,.\,\|J_n^{(\alpha+1,\,\beta)}\|_{s\,;\,\alpha,\,\beta}\,,\ s=q/(q-1),$$

$$\mu(n,\ \alpha,\ \beta)=2^{-(\alpha+\beta)/2}(\Gamma(\alpha+n+2)\,\Gamma(\alpha+\beta+n+2))^{1/2}(\Gamma(n+\beta+1)\,\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)\,.\,(\alpha+\beta+2n+2))^{-1/2}.$$

В случае целых и полуцелых $\alpha=\beta\geqq-1/2$ равенство $\|L_{n,\,\infty}^{(\alpha,\,\beta)}\|_C=L_{n,\,\infty}^{(\alpha,\,\beta)}(1)$ известно (см. [11, 3]).

По поводу иных следствий из теоремы 1 см. [9].

4. О нормах операторов — частных сумм Фурье — Лежандра. В этом пункте мы полагаем для краткости $L_{q\,;\,0,\,0}=L_q$, $\|f\|_{q\,;\,0,\,0}=\|f\|_q$, $S_n^{(0,\,0)}=S_n$, $\|S_n\|_{q\to s}=\sup\{\|S_n(f)\|_s:\|f\|_q\leqq1\}$ — норма S_n как оператора из L_q в L_s $(q,\ s\geqq1)$.

Для двух последовательностей $\{\alpha_n\}_0^\infty$, $\{\beta_n\}_0^\infty$ положительных чисел будем писать $\alpha_n\sim\beta_n$, если существуют постоянные C_1, $C_2>0$, не зависящие от n, и такие, что $C_1\leqq\alpha_n/\beta_n\leqq C_2$, $n=0,\ 1,\ 2,\ldots$

Теорема 4. *Справедливы соотношения*

$$\|S_n\|_{q\to s}\sim\begin{cases} n^{2\max\left\{\frac{1}{q}-\frac{1}{\max\{s,\,4/3\}},\ 0\right\}}, & \text{если}\ \ 1\leqq\min\{q,\ s\}\leqq2,\\ \text{исключая случаи}\ 1\leqq q\leqq4/3,\ s=4/3\ \text{и}\ q=4/3,\ 1\leqq s<4/3; & \\ n^{2(1/q-3/4)}\,.\,\ln^{3/4}(n+2), & \text{если}\ \ 1\leqq q<4/3,\ s=4/3;\\ \ln^{1/4}(n+2), & \text{если}\ \ q=4/3,\ 1\leqq s<4/3;\\ \ln(n+2), & \text{если}\ \ q=s=4/3;\\ \|S_n\|_{s'\to q'} & \text{если}\ \ q,\ s\geqq2.\end{cases}$$

Отметим, что при $q=s$ указанные соотношения известны: случай $q\in(4/3,\ 4)$ рассмотрен Поллардом [12]; в случаях $q=4/3$ и $q=4$ точную по порядку оценку $\|S_n\|_{q\to s}$ сверху получил Моторный [5], а снизу — Бадков [2]; случай $q\in[1, 4/3)$ рассмотрен Бадковым [2]; в случае $q\in(4, +\infty)$ точная по порядку оценка $\|S_n\|_{q\to s}$ сверху получена в [5], а снизу — в [2]; случай $q=\infty$ рассмотрен в [1].

Существенную роль в доказательстве теоремы 4 играет теорема 3 (для случая $\alpha=\beta=0$).

5. О приближении функций классов $\mathrm{Lip}\,\alpha$ **суммами Фейера — Лежандра.** Здесь, как и в п. 4, $S_n(f;\ x)$ — n-ая частная сумма ряда Фурье — Лежандра функции f. Суммами Фейера — Лежандра функции f назовем выражения $\sigma_n(f;\ x)=(n+1)^{-1}\Sigma_{k=0}^n S_k(f;\ x)$, $n=0,\ 1,\ 2,\ldots$ Имеет место равенство

$$\sigma_n(f;\ x)=(f*K_n)(x), \tag{7}$$

где $K_n(u)=\Sigma_{k=0}^n 2^{-1}(2k+1)(1-(k/(n+1))P_k(u)$, $P_k(k=0, 1, \ldots)$ — многочлены Лежандра, нормированные условием $P_k(1)=1$.

Положим

$$a(n)=\begin{cases}(n+1)^{-2\alpha}, & 0<\alpha<1/2,\\ (n+1)^{-1}\ln(n+2), & \alpha=1/2,\\ (n+1)^{-1}, & 1/2<\alpha\leq 1,\end{cases}\qquad b(n)=\begin{cases}(n+1)^{-\alpha}, & 0<\alpha<1,\\ (n+1)^{-1}\ln(n+2), & \alpha=1.\end{cases}$$

Теорема 5. *Пусть* $f\in\mathrm{Lip}_1\,\alpha$, $0<\alpha\leq 1$. *Справедлива оценка*

$$|f(x)-\sigma_n(f;\ x)|\leq C_1(\alpha)\,|x|^\alpha a(n)+C_2(\alpha)(1-x^2)^{\alpha/2}b(n),$$

$x\in[-1,\ 1]$; $n=0,\ 1,\ldots$; $C_i(\alpha)$, $(i=1,\ 2)$ — *положительные постоянные, зависящие только от* α.

Доказательство теоремы 5 опирается на равенство (7). Схема доказательства теоремы 5 изложена в [10].

6. О представлении функции в виде о. с. и о приближении функций алгебраическими многочленами. Будем в этом пункте рассматривать вес Лежандра $p(x)=1$. Введем следующие обозначения. Если $\mathscr{F}$ — подпространство в L_p, то $E(f, \mathscr{F})_p$ — наилучшее приближение $f\in L_p$ в метрике L_p элементами из $\mathscr{F}$. H_n — множество всех алгебраических многочленов степени не выше n. Будем писать $\varphi\perp\mathscr{F}$, если $\forall f\in\mathscr{F}$ $\int_{-1}^1\varphi(x)f(x)dx=0$. Для $p\geq 1$ $H_p(\mathscr{F})=\{\varphi:\varphi\in L_p,\ \|\varphi\|_p\leq 1,\ \varphi\perp\mathscr{F}\}$; $H_p^n=H_p(H_n)$; $E_n(f)_p=E(f, H_n)_p$. M — пространство существенно ограниченных на $[-1,\ 1]$ функций.

Лемма 1. *Пусть* $f=\varphi*g$, $g\in M$; $p,\ p',\ q,\ q'\geq 1$, $1/p+1/p'=1$, $1/q+1/q'=1$. *Справедливо равенство*

$$\sup\{E_n(f)_q:\ \|\varphi\|_p\leq 1\}=\sup\{\|f\|_{p'}:\varphi\in H_{q'}^n\}. \tag{8}$$

Частным случаем (8) является равенство $\sup\{E_n(f)_p:\|\varphi\|_p\leq 1\}=\sup\{\|f\|_{p'}:\varphi\in H_{p'}^n\}$.

Лемма 2. *Пусть* $f=\varphi*g$, $g\in C$. *Тогда при* $1\leq q\leq\infty$, $1/q+1/q'=1$ $\sup\{\|f\|_C:\ \varphi\in H_{q'}^n\}=E_n(g)_q$.

Следствие. В условиях леммы 2 $\sup\{E_n(f)_q:\ \|\varphi\|_1\leq 1\}=E_n(g)_q$, $1\leq q\leq\infty$.

Лемма 3. *Если* $f=K*g$, $g\in L_p$ $(1\leq p\leq\infty)$, $K\in L$, *то* $E_n(f)_p\leq E_n(g)_p\times E_n(K)_1$.

Пусть $r\in N$. Для f такой, что $f^{(2r)}\in M$, обозначим $D_r(f)(t)=((1-t^2)^r f^{(r)}(t))^{(r)}$. Положим также

$$B_r(t)=(-1)^r\sum_{k=r}^{\infty}2^{-1/2}\sqrt{2k+1}\,.\,((k+r)!)^{-1}(k-r)!\;X_k(t),$$

где $X_k=J_k^{(0,\,0)}$, $k=0,\,1,\ldots$

Лемма 4. *Если* $n\geq 0$ *целое и* $f^{(2n+2)}\in M$, *то* $f-S_n(f)=D_{n+1}(f)*B_{n+1}$.

Теорема 6. *Если* $r\in N$, $f^{(2r)}\in C$, *то при* $n\geq r-1$

$$E_n(f)_C\leq E_n(D_r(f))_C\,.\,M_{r,\,n},\tag{9}$$

где $M_{r,\,n}=\Gamma(2r)\,(2^{2r-3}\Gamma^2(r))^{-1}\,(n+2)\,.\,\Sigma_{\nu=0}^{\infty}((2\nu+1)\,(n+2)-1-r)\,!/((2\nu+1)\times(n+2)+r)^{-1}!$; $M_{r,\,n}\sim n^{-2r}$ *при* $n\to\infty$.

Неравенство (9) — аналог известного неравенства Ахиезера — Крейна и Фавара, относящегося к тригонометрическому случаю.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Агаханов, Г. И. Натансон. Функция Лебега сумм Фурье — Якоби. *Вестник ЛГУ, Сер. мат., мех., астрон.*, 1968, № 1, 11—23.
2. В. М. Бадков. Аппроксимативные свойства рядов Фурье по ортогональным полиномам. *Успехи мат. наук,* **33**, 1978, № 4.
3. И. К. Даугавет. Введение в теорию приближения функций. Ленинград, 1977.
4. Г. В. Жидков. Конструктивная характеристика одного класса непериодических функций. *Доклады АН СССР,* **169**, 1966, 1002 — 1005.
5. В. П. Моторный. О сходимости в среднем рядов Фурье по многочленам Лежандра. *Доклады АН СССР,* **204**, 1972, 788—790.
6. М. К. Потапов. Структурная характеристика классов функций с данным порядком наилучшего приближения. *Тр. Мат. инст. АН СССР.* **134**, 1975, 260—277.
7. М. К. Потапов. О приближении многочленами Якоби. *Вестник МГУ, Сер. мат., мех.*, 1977, № 5, 70—82.
8. С. З. Рафальсон. О приближении функций суммами Фурье — Якоби. *Изв. ВУЗ, Матем.* 1968, №4, 54—62.
9. С. З. Рафальсон. О частных суммах рядов Фурье по ортогональным многочленам. *Доклады АН СССР,* **237**, 1977, 1297—1300.
10. С. З. Рафальсон. О приближении функций классов Lip α суммами Фейера — Лежандра. *Изв. ВУЗ, Математика,* 1975, № 5, 109—112.
11. T. H. Gronwall. Über die Laplacesche Reihe. *Math. Ann.*, **74**, 1913, 213 — 270.
12. H. Pollard. The mean Convergence of the Orthogonal Series, I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **62**, 1947, No. 3, 387—403.

Ленинградский финансово-экономический институт
Ленинград

Получено 26 июня 1981 г.
СССР