КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'81
София, 1983, с. 144—149

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
Sofia, 1983, p. 144—149

ОСЦИЛЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (ОБЫКНОВЕННЫХ И В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ)

Ф. С. Рофе-Бекетов

Резюме. Теоремы типа Штурма на конечном и бесконечном интервалах установлены для самосопряженных дифференциальных уравнений второго и произвольного порядка с операторными коэффициентами из $B(H)$, где H — сепарабельное гильбертово пространство. Результатами охвачены осцилляционная теорема и теорема Морса об индексе, установлены теоремы сравнения и перемежаемости, в том числе обобщение теоремы Хайнца — Реллиха; теоремы факторизации, обобщающие теоремы Фробениуса и М. Г. Крейна — Хайнца — Реллиха. Получено достаточное условие осцилляторности таких уравнений порядка $2n$, переходящее для уравнений второго порядка в теорему Эт-джена и Павловски [11]. Рассмотрено применение результатов к уравнениям с высокосингулярным потенциалом. К исследованию дискретного спектра в лакунах непрерывного применяется метод фазовых функций. Для сильно эллиптических систем в частных производных установлена осцилляционная теорема в индексной форме.

Осцилляционная теория Штурма, различные ее обобщения и применения в связи со спектральной теорией для конечных систем рассмотрены в известных монографиях [1—9] и многочисленных статьях. Бесконечные системы второго порядка рассмотрены в [10, 11], произвольного порядка — в [12]. §§ 1—3 основаны на [10] и [12].

1. Теоремы типа Штурма. Рассмотрим краевую задачу для вектор-функций со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве H,

$$-(P(x)y')'+Q(x)y=\lambda W(x)y, \tag{1}$$

$$\cos A\,.\,P(a)y'(a)-\sin A\,.\,y(a)=0, \tag{2}$$

$$\cos B\,.\,P(b)y'(b)+\sin B\,.\,y(b)=0, \tag{3}$$

где $P(x)\geqslant 0$, $W(x)\geqslant 0$, $Q(x)$, A, B, $P'(x)$ — самосопряженные операторы из $B(H)$, непрерывно зависящие от x, $-\pi I/2\leqslant A$, $B\leqq \pi I/2$ (I — единичный оператор в H). Пусть $Y(x,\lambda)\in B(H)$ — решение (1) при начальных данных

$$Y(a,\lambda)=\cos A,\qquad P(a)Y'(a,\lambda)=\sin A. \tag{4}$$

Задача (1)—(3) порождает самосопряженный полуограниченный снизу [13] оператор L в $H(a,b)=\mathscr{L}^2\{H;\,(a,b);\,W(x)dx\}$.

При $\cos B=0$ в (3) получаем условие

$$y(b)=0. \tag{3_0}$$

Связанные с этой задачей величины отмечаем таким же индексом.

Пусть λ_e — нижняя грань предельного спектра задачи (1)—(3), $N(\lambda)$ — количество собственных значений $\lambda_k<\lambda$ с учетом их кратности $\varkappa(\lambda_k)$.

Теорема 1. *При* $\lambda\leqq\lambda_e^0$ *для задачи* (1), (2), (3_0)

$$\Sigma_{x\in(a,b)} \operatorname{nul} Y(x, \lambda)=N_0(\lambda),$$

$$\operatorname{nul} Y(x, \lambda)=\operatorname{def} Y(x, \lambda),$$

где $\operatorname{nul} Y(x, \lambda)=\dim\operatorname{Ker} Y(x, \lambda)$, $\operatorname{def} Y=\dim\operatorname{Coker} Y$.

Для задачи (1)—(3) *справедливы оценки*

$$N(\lambda)-\min\{\operatorname{rnk}\cos B, \dim H-\varkappa(\lambda)\}\leqq N_0(\lambda)\leqq N(\lambda).$$

При $b=\infty$ *теорема верна для расширения* L^F *оператора* (1), (2) *в* $H(a, \infty)$ *по Фридрихсу, в предположении полуограниченности.*

Следствие 1. *В случае скалярной задачи* (1)—(3) $\Sigma_{x\in(a,b)} \operatorname{nul} Y(x,\lambda_n)=n-1$, *что эквивалентно классической осцилляционной теореме Штурма.*

Замечание 1. Теорема 1 содержит в себе при $\dim H<\infty$, $\cos A=\cos B=0$, теорему Морса об индексе, возможность обобщения которой на общий случай конечных систем Штурма—Лиувилля отметил Постников [9].

Если $a=-\infty$ или является конечной сингулярной точкой для уравнения (1), то построение фундаментального решения $Y(x,\lambda)\in B(H)$, удовлетворяющего самосопряженному условию при $x=a$, не сводится к обычной задаче Коши (4). В ряде случаев, однако, построение фундаментального решения системы, определенного условиями на сингулярном конце, удается в явном виде. Например, для скалярного уравнения с высокосингулярным потенциалом

$$-y''+[V(x)+U(x)]\,y=k^2y, \quad 0<x<\infty, \tag{5}$$

где $\exists\, p>2,\ \delta>0,\ C>0:\ Cx^{-p}\leqq V(x)\nearrow+\infty,\ (x\to 0),\ V'=O(V^{3/2-\delta})$, $|U|\,V^{-1/2}\in\mathscr{L}^1(0,\varepsilon)$, регулярное при $x\to 0$ решение $\varphi(x, k)$ при близких условиях построено и исследовано в [14—16]. Оно однозначно определяется требованием

$$\lim_{x\to 0} 2^{1/2}V^{1/4}(x)\exp\{\int_x^1 V^{1/2}(t)dt\}\varphi(x, k)=1. \tag{6}$$

Для уравнения (5) с операторнозначным коэффициентом $U(x)$ и скалярным $V(x)=V(x)I$ с тем же условием (6) построение регулярного операторнозначного решения $\varphi(x, k)$ осуществляется повторением доказательства теоремы 1.2.1 из [16].

Предложение 1. *Количество отрицательных уровней задачи рассеяния* (5), (6) *с операторным потенциалом* $U^*(x)=U(x)$ *(при условии дискретности отрицательного спектра* [17, 18]) *равно* $\Sigma_{x\in(0,\infty)}\operatorname{nul}\varphi(x,0)$.

Пусть теперь $l_{2n}[y]$ — самосопряженное дифференциальное выражение порядка $2n$ с коэффициентами из $B(H)$, допускающее самосопряженные распадающиеся краевые условия $U_a[y]=0$, $U_b[y]=0$, $-\infty\leq a<b\leq\infty$ (см. [19]), и $Y(x,\lambda)\in B(H^n,H)$ — фундаментальное решение задачи

$$(7)\qquad l_{2n}[y]=\lambda W(x)y,\qquad U_a[y]=0\quad(\operatorname{Im}\lambda=0),$$

которая на финитных относительно $x=b$ функциях предполагается полуограниченной снизу. Обозначим

$$Y^{\wedge}(x,\lambda)=\operatorname{col}\{Y^{(k)}(x,\lambda\}_{k=0}^{n-1}\in B(H^n),$$

$$Y^{\vee}(x,\lambda)=\operatorname{col}\{Y^{[2n-j]}(x,\lambda)\}_{j=1}^{n}\in B(H^n),$$

где $Y^{[j]}$ — квазипроизводные [19].

Теорема 2. *При $\lambda<\lambda_e(L^F)$, где L^F — расширение по Фридрихсу задачи* (7), $\Sigma_{x\in(a,b)}\operatorname{nul}Y^{\wedge}(x,\lambda)=N^F(\lambda)$.

Теорема 3. *Пусть $-\infty<a<b<\infty$, $Y_k(x)$ $(k=1,2)$ — фундаментальные решения задач вида* (7) $l_{2n}^{(k)}[y]=0$, $U_a^{(k)}[y]=0$, $W_k(x)\equiv I$, $\lambda_e^{(2)0}>0$, $\langle l_{2n}^{(1)}[y],y\rangle\leq\langle l_{2n}^{(2)}[y],y\rangle$ *для финитных в* (a,b) *вектор-функций* ($\langle\,.\,,\,.\rangle$ — скалярное произведение в $H(a,b)$). *Тогда, если*

$$\operatorname{rnk}\{Y_1^{\vee *}Y_2^{\wedge}-Y_1^{\wedge *}Y_2^{\vee}\}_{x=a}=m<\infty,$$

то $\Sigma_{x\in(a,b]}\operatorname{nul}Y_1^{\wedge}(x)\geq\Sigma_{x\in(a,b]}\operatorname{nul}Y_2^{\wedge}(x)-m$. (Отсюда вытекают теоремы сравнения и перемежаемости Хайнца — Реллиха [3, с. 219]).

2. Теоремы факторизации. Обобщение теоремы Фробениуса на бесконечномерный случай:

Теорема 4. *Пусть $\omega(x)\in B(H^n,H)$ — какое-нибудь самосогласованное решение уравнения* (7) *при $\lambda=0$ (т. е. удовлетворяющее в некоторой точке самосопряженному условию). Тогда в каждой точке $x\in(a,b)$, где существует $(\omega^{\wedge})^{-1}(x)$ на всем H^n и $\|(\omega^{\wedge})^{-1}(x)\|<\infty$, l_{2n}* (7) *допускает представление*

$$(8)\qquad l_{2n}[y]=\mu^{+}p_n\mu[y],$$

где $p_n(x)$ — старший коэффициент операции l_{2n}, $\mu[y]=y^{(n)}-\omega^{(n)}(\omega^{\wedge})^{-1}y^{\wedge}$ μ^{+} — операция, формально сопряженная к μ при $W(x)\equiv I$.

Обобщение теоремы М. Г. Крейна — Хайнца — Реллиха [3]:

Теорема 5. *Пусть старший коэффициент операции l_{2n}* (7) *положительно определен: $p_n(x)\gg 0$. Тогда неотрицательность минимального оператора, отвечающего l_{2n}, эквивалентна любому из двух следующих условий:*

1^0. *Представимость l_{2n} в виде* (8), *где $\mu[y]=y^{(n)}+s_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\ldots+s_0(x)y$, $s_k(x)\in C^n(a,b)$, $k=0,1,\ldots n-1$.*

2^0. *Существование $\omega(x)$, удовлетворяющего условиям теоремы 4 при всех $x\in(a,b)$*, включая обратимость $\omega^{\wedge}(x)$.

3. Критерий осцилляторности. Уравнение (7) называем осцилляторным при $\lambda=0$ в окрестности $x=\infty$, если оно не имеет самосогласованного решения $Y(x,0)\in B(H^n,H)$ такого, что $(Y^{\wedge})^{-1}(x,0)$ существует на всем H^n и ограничено при каждом достаточно большом x.

Пусть g — линейный позитивный функционал на C^*-алгебре $B(H)$. $g(D^j p(x) D^k) = D^j g(p(x)) D^k$, где $p(x) \in B(H)$.

Теорема 6. *Если скалярное уравнение $g(l_{2n})[u]=0$ осцилляторно, то и операторное уравнение (7) порядка $2n$ с позитивным старшим коэффициентом тоже осцилляторно при $\lambda=0$.*

Для операторов второго порядка отсюда следует теорема Этджена и Павловски [11].

4. Фазовые функции и дискретный спектр в лакунах непрерывного. Пусть u_1, u_2 — матричные решения уравнения $-u''+q(x)u=\lambda u$, $\operatorname{Im}\lambda=0$, с J — унитарной матрицей Вронского, $N_1(\lambda,\mu)$ — количество собственных значений в интервале (λ,μ), $N_2(\lambda,\mu)$ — то же для возмущенной системы — $y''+[q(x)+p(x)]y=\lambda y$. Как известно [20], матрица $\theta_1(x,\lambda)=(u_1-iu_2)^{-1}(u_1+iu_2)$ унитарна.

Лемма 1. *Пусть $\dim H<\infty$, y — самосогласовано, $\det y\neq 0$. Тогда $\det y=0 \Leftrightarrow \det(\theta-I)=0$, где $\theta=\theta_1\theta_2$ — унитарна, $\theta_2'=-(i/2)\theta_2(\theta-I)^*(u_1-iu_2)^*p(x)(u_1-iu_2)(\theta-I)$. Собственные значения матрицы $\theta(x,\lambda)$ с возрастанием x могут проходить точку $+1$ на окружности только в положительном направлении.*

Теорема 7. *Если $N_1(\lambda,\mu)<\infty$, то $N_2(\lambda,\mu)<\infty$ тогда и только тогда, когда $\sup_x|\ln\det[\theta_2(x,\mu)\theta_2^{-1}(x,\lambda)]|<\infty$.*

Теорема 8 ([21, 22]). *В скалярном случае, при знакопостоянном $p(x)$, $\sup_{x\in R_+}|\ln\theta_2(x,\lambda)|<\infty$, если и только если уравнение $z''+v(t)z=0$ неосцилляторно при $t\nearrow t(\infty)$, где*

$$t=t(x)=\int_0^x |p(s)|\,u_2^2(s,\lambda)Q(s)ds,$$

$$Q(x)=\exp\{2\int_0^x p(s)u_1(s,\lambda)u_2(s,\lambda)ds\},$$

$$v(t)=u_1^2(x(t),\lambda)u_2^{-2}(x(t),\lambda)Q^{-2}(x(t))\in\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}.$$

Отсюда вытекают [21—23] для малых на бесконечности возмущений $p(x)$ оператора Хилла достаточные условия конечности либо бесконечности количества дискретных уровней, возникающих у края λ_k заданной лакуны: $p(x)\leqq C_k' x^{-2}$ либо $p(x)\geqq C_k'' x^{-2}$ при $|x|\to\infty$. (Для полубесконечной лакуны признак конечности числа дискретных уровней установлен в [24]. Фазовые уравнения в физике [25, 26] используются для малых на бесконечности потенциалов.)

5. Осцилляционная теорема для эллиптических систем. Пусть $\Omega\subseteq\mathbf{R}^n$ — конечная или бесконечная область с кусочно-гладкой границей $\Gamma=\partial\Omega$, $\Omega^\sim$ есть $\Omega\cup\Gamma$ с разрезами вдоль внутренних для $\Omega\cup\Gamma$ участков Γ,

$$l[u]=\lambda W(x)u,\quad \det W\neq 0,\quad W=W^*\geqslant 0,\quad x\in\Omega, \tag{9}$$

— сильно эллиптическая система произвольного порядка в $\Omega^\sim$, порождающая на $C^\infty_{0,\Gamma}(\Omega^\sim)$ (то есть на вектор-функциях из $C_0^\infty(\Omega^\sim)$, подчиненных заданному на Γ краевому условию локального типа) симметрический, полуограниченный снизу оператор $L\geqq\gamma$ в $\mathscr{L}^2(\Omega^\sim, Wdx)$, L^F — расширение L по Фридрихсу, и для некоторого семейства областей $\Omega_\xi \subset \Omega$, не обязательно монотонного по ξ, пусть

$$L_\xi = L \upharpoonright C^\infty_{0,\Gamma}(\Omega^\sim) \cap \{u : \operatorname{supp} u \subseteq \Omega_\xi^\sim\}.$$

Если при $\lambda < \beta$ спектр оператора L^F дискретен, там же дискретны спектры L_ξ^F.

Теорема 9 [27]. *Пусть*: a) $\lambda_j(L_\xi^F)$ *непрерывны по* ξ, b) *строго убывают по* ξ *и* c) $\lambda_1(L_\xi^F) \to +\infty$ *при* $\xi \searrow 0$. *И пусть, если область* Ω *бесконечна, то*

$$\Omega \cap K_N \subset \Omega_\xi, \quad \xi > \xi(N), \quad K_N = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < N\},$$

а в случае конечной Ω *пусть*

$$D(L) = C_0^\infty(\Omega), \quad \Omega = \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcap_{\xi=k}^{\infty} \Omega_\xi.$$

Тогда для оператора L^F

$$N^F(\lambda) = \sum_{\xi \in (0,\, \infty)} \varkappa_\xi(\lambda) \quad (\lambda < \beta),$$

где $\varkappa_\xi(\lambda) \geq 0$ — *кратность* λ, *как собственного числа оператора* L_ξ^F.

В случае монотонного по включению семейства $\{\Omega_\xi\}$ условие b) обеспечивается [7, 28] единственностью решения задачи Коши для (9), которую при соответствующих условиях обеспечивают теоремы Гольмгрена, Карлемана или [29, 30]. Условие c) для однородной задачи Дирихле обеспечивается условием В. А. Кондратьева — Ландиса [31] либо для регулярной в Ω_ξ задачи условием М. И. Вишика: $\operatorname{mes} \Omega_\xi \to 0$, $\xi \searrow 0$. Условие a) обеспечивается теоремой Куранта и ее обобщением [27], связанным с применением теорем вложения [32, 33] и позволяющим отказаться от условия близости границ возмущенной и невозмущенной областей. В случае бесконечной области Ω существенна также сходимость $\lambda_j(L_\xi^F) \to \lambda_j(L^F) + 0 < \beta$ при $\xi \to \infty$, установленная в [27].

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Левитан, И. С. Саргсян. Введение в спектральную теорию. Москва, 1970.
2. А. Г. Костюченко, И. С. Саргсян. Распределение собственных значений. Москва, 1979.
3. И. М. Глазман. Прямые методы качественного спектрального анализа. Москва, 1963.
4. А. Л. Гольденвейзер, В. Б. Лидский, П. Е. Товстик. Свободные колебания тонких упругих оболочек. Москва, 1979.
5. Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. Линейные операторы. Спектральная теория. Москва, 1966.
6. Ф. Аткинсон. Дискретные и непрерывные граничные задачи. Москва, 1968.
7. Р. Курант, Д. Гилберт. Методы математической физики. Москва, 1951.
8. Ф. Хартман. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва, 1970.
9. М. М. Постников. Вариационная теория геодезических. Москва, 1965.
10. Ф. С. Рофе-Бекетов, А. М. Холькин. О связи между спектральными и осцилляционными свойствами матричной задачи Штурма — Лиувилля. *Мат. сб.*, **102**, 1977, № 3, 410—424.

11. G. J. Etgen, J. F. Pawlowski. A comparison theorem and oscillation criteria for second order differential systems. *Pacific J. Math.* **72**, 1977, № 1, 59—69.

12. Ф. С. Рофе-Бекетов, А. М. Холькин. Связь спектральных и осцилляционных свойств дифференциальных систем произвольного порядка. *Доклады АН СССР,* **261**, 1981, № 3, 551—555.

13. М. Л. Горбачук, В. А. Михайлец. Полуограниченные самосопряженные расширения симметрических операторов. *Доклады АН СССР,* **226**, 1976, 765—767.

14. N. Limic. *Nuovo Cimento*, **26**, 1962, No 3, p. 581; **28**, 1963, № 5, p. 1066.

15. Ф. С. Рофе-Бекетов, Е. Х. Христов. Операторы преобразования и функция рассеяния в случае высокосингулярного потенциала. *Доклады АН СССР,* **168**, 1966, 1265—1268; Некоторые аналитические вопросы и обратная задача Штурма—Лиувилля для уравнения с высокосингулярным потенциалом. *Доклады АН СССР,* **185**, 1969, 768—771.

16. Ф. С. Рофе-Бекетов, Е. Х. Христов. Асимптотические и аналитические вопросы, связанные с рассеянием на высокосингулярном потенциале. — В: Математическая физика и функциональный анализ. (Труды ФТИНТ АН УССР), № 2, 1977, с. 122.

17. М. Г. Гасымов, В. В. Жиков, Б. М. Левитан. Условия дискретности и конечности отрицательного спектра операторного уравнения Шредингера, *Мат. заметки*, **2**, 1967, № 5, 531—538.

18. Д. Р. Яфаев. Об отрицательном спектре операторного уравнения Шредингера. *Мат. заметки*, **7**, 1970, 753—763.

19. Ф. С. Рофе-Бекетов. Самосопряженные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций. *Доклады АН СССР,* **184**, 1969, 1034—1037.

20. В. Б. Лидский. Осцилляционные теоремы для канонической системы дифференциальных уравнений. *Доклады АН СССР,* **102**, 1955, 877—880.

21. Ф. С. Рофе-Бекетов. —В: Спектральная теория операторов. Баку, 1979, с. 146—153.

22. Ф. С. Рофе-Бекетов. —В: Функциональный анализ. Ульяновск, 1977, № 9, с. 144—155.

23. F. S. Rofe-Beketov. Square integrable solutions, self adjoint extensions and spectrum of differential systems. Differ. Equat. — In: Proc. Internat. Conf. Uppsala, 1977, 169—178.

24. М. Ш. Бирман. О спектре сингулярных граничных задач. *Мат. сб.*, **55**, 1961, № 2, 125—174.

25. В. В. Бабиков. Метод фазовых функций в квантовой механике. Изд. 2. Москва, 1976.

26. Ф. Калоджеро. Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния Москва, 1972.

27. Ф. С. Рофе-Бекетов. Возмущения и расширения по Фридрихсу полуограниченных операторов на переменных областях. *Доклады АН СССР,* **255**, 1980, с. 1054—1058.

28. Ю. И. Любич. О фундаментальных решениях линейных дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа. *Мат. сб.*, **39**, 1956, № 1, 23—36.

29. Е. М. Ландис. О некоторых свойствах решений эллиптических уравнений. *Доклады АН СССР,* **107**, 1956, 640—643.

30. М. М. Лаврентьев. О задаче Коши для линейных эллиптических уравнений второго порядка. *Доклады АН СССР,* **112**, 1957, 195—197.

31. Е. М. Ландис. О поведении решений эллиптических уравнений высокого порядка в неограниченных областях. *Тр. Моск. мат. об-ва,* **31**, 1974, 35—57.

32. С. Л. Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Ленинград, 1950.

33. С. М. Никольский. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. Изд. 2. Москва, 1977.

ФТИНТ АН УССР
310164 Харьков-164 СССР

Получено 2 июня 1981 г.