КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'81
София, 1983, с. 150—156

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
Sofia, 1983, p. 150—156

КУСОЧНО-МОНОТОННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Е. А. Севастьянов

Резюме. В работе исследуется задача равномерного приближения посредством произвольных кусочно-монотонных функций. Устанавливаются основные соотношения, связывающие наименьшие кусочно-монотонные уклонения $M_n(f)$ с Ф-вариациями приближаемых функций и с некоторыми аналогичными характеристиками. В частности, в терминах нового понятия (Ф, n)-вариаций дается необходимое и достаточное условие того, что $M_n(f)=O(n^{-\alpha})$ при $0<\alpha<1$.

При помощи среднего модуля колебания определяется так называемый модуль колебания $v(\delta, f)$ и указывается точная формула, выражающая модуль $v(\delta, f)$ через уклонения $M_n(f)$.

Указываются приложения кусочно-монотонной аппроксимации к приближениям функций тригонометрическими суммами Фурье и к приближениям рациональными функциями.

1. Частичные изменения функций. Пусть действительнозначная функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Положим

$$M_n(f)=M_n(f,[a,b])=\inf_{M_n}\sup_{a\le x\le b}\{|f(x)-M_n(x)|\},$$

где инфимум берется по всем кусочно-монотонным функциям $M_n(x)$ порядка $\le n$, т. е. по всем функциям $M_n(x)$, имеющим на отрезке $[a, b]$ не более n участков монотонности.

Через $\Phi=\Phi(u)$ будем обозначать непрерывную, неубывающую, выпуклую книзу на $[0, +\infty)$ функцию $\Phi(u)$, $\Phi(0)=0$; через $V_\Phi(f)$ — Ф-вариацию функции $f(x)$, $x\in[a, b]$: $V_\Phi(f)=\sup\{\Sigma_i\Phi(|f(x_{i+1})-f(x_i)|\}$, где супремум берется по всем $\{x_i\}$, $x_i\in[a, b]$.

Уточняя понятие Ф-вариации, положим $V_{n\Phi}(f)=\sup\{\Sigma_{i=1}^n\Phi(|f(\beta_i)-f(\alpha_i)|)\}$, где супремум возьмем при фиксированном n по всем $\alpha_i, \beta_i\in[a, b]$, $a\le\alpha_1<\beta_1\le\alpha_2<\beta_2\le\ldots\le\alpha_n<\beta_n\le b$. Очевидно, $V_{n\Phi}(f)\to V_\Phi(f)$, $n\to\infty$. При $\Phi(u)=u$ будем писать $V_n(f)$ вместо $V_{n\Phi}(f)$. Величину $V_{n\Phi}(f)$ назовем n-ым частичным Ф-изменением функции f на отрезке $[a, b]$. То значение k, при котором $V_{n\Phi}(f/k)=1$, обозначим через $V^*_{n\Phi}(f)$. Функцию $V^*_{n\Phi}(f)$ целочисленного аргумента n назовем Ф-модулем изменения функции f.

Теорема 1 [1, 2]. *Для любой функции* $f(x)$, $x\in[a, b]$, *и любого* $n=1, 2, \ldots$ $V_n(f, [a, b])=\Sigma_{k=1}^{n-1}2M_k(f, [a, b])$.

Таким образом, для вариации $\mathrm{Var}\, f$ функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ имеем

(1) $$\operatorname{Var} f=\sum_{k=0}^{\infty} 2M_k(f).$$

Сложнее связаны друг с другом величины $V_{n\Phi}(f)$ и уклонения $M_k\ (f)$, когда $\Phi(u)=o(u)$.

Теорема 2. *Для любых функций f и Φ имеем*

(2) $$V_{n\Phi}(f)\leq\sum_{k=0}^{n-1}\Phi(2M_k(f))\leq V_{n\Phi}(f)\,(\log n+1),$$

(3) $$2M_n(f)\leq\Phi^{-1}(1/n)V^{*}_{n\Phi}(f)\qquad(n=1, 2, \ldots).$$

Нетрудно показать, что для любой функции $\Phi(u)$ и любой последовательности $a_0\geq a_1\geq\ldots\geq a_k\to 0$ найдется функция $f(x)$ такая, что $M_k(f)=a_k$ $(k=0, 1, \ldots)$ и левое из неравенств (2) принимает вид равенства при всех $n=1, 2, \ldots$ Что касается точности правого из неравенств (2) и неравенства (3), то имеет место такое утверждение.

Теорема 2′. *Пусть функция $\Phi''(u)$ сохраняет знак и существует $\lambda>1$, такое, что $2\Phi(\lambda u)\leq\Phi(2u)$ (в частности, пусть $\Phi(u)=u^p$, $p>1$). Тогда найдется непрерывная функция $f_0(x)$, $x\in[a, b]$, и постоянная $c_\Phi>0$ такие, что при всех натуральных n имеет $V_{n\Phi}(f_0)=V^{*}_{n\Phi}(f_0)=1$,*

$$\sum_{k=0}^{n-1}\Phi(2M_k(f_0))\geq c_\Phi\log n,\quad 2M_n(f_0)\geq c_\Phi\Phi^{-1}(1/n).$$

Между рассмотренными выше величинами $M_n(f)$, $V_\Phi(f)$, $V_{n\Phi}(f)$ общее то, что они инвариантны по отношению к геоморфизмам μ отрезка $[a, b]$: $M_n(f, [a, b])=M_n(f\circ\mu, [a, b])$, $V_{n\Phi}(f)=V_{n\Phi}(f\circ\mu)$, где $f\circ\mu=f(\mu(t))$, $n=1, 2, \ldots$ С этой точки зрения каждая из них является характеристикой, отражающей особенности изменения графика $y=f(x)$ по „высоте“. Теоремы настоящего пункта и следующих фактически выясняют связь между указанными характеристиками.

2. Функциональные классы Салема. Тот факт, что оба неравенства (2) являются точными, свидетельствует о невозможности описать класс функций f с конечными Φ-вариациями $V_\Phi(f)$, взятыми относительно одной и той же функции Φ, $2\Phi(\lambda u)\leq\Phi(2u)$, через уклонения $M_n(f)$ (ср. с (1)). Изменим теперь несколько постановку задачи.

Определение. Пусть $\{\alpha_n\}$ — последовательность положительных чисел, $\alpha_n\to 0$ при $n\to\infty$. Скажем, что $f\in V(\{\alpha_n\})$, если $V_\Phi(f)<\infty$ при некоторой функции Φ такой, что $\Sigma\Psi(\alpha_n)<\infty$, где $\Psi(t)$ — функция, дополнительная к $\Phi(u)$ в смысле Юнга. Класс $V(\{\alpha_n\})$ назовем салемовским классом, взятым относительно последовательности $\{\alpha_n\}$.

Очевидно, чем быстрее убывает последовательность $\{\alpha_n\}$, тем шире класс $V_n(\{\alpha_n\})$ (если ряд $\Sigma\alpha_n$ сходится, то $V(\{\alpha_n\})$ совпадает с классом функций, имеющих разрывы только первого рода).

Теорема 3. *Положим $\widehat{\alpha}_n=(\log^p n)/n$, где p — любое действительное число. Функция $f(x)$, $x\in[a, b]$, принадлежат классу $V(\{\widehat{\alpha}_n\})$ тогда и только тогда, когда $\Sigma_{n=1}^{\infty}\widehat{\alpha}_n M_n(f)<\infty$.*

Замечание. Теорема 3 остается справедливой и при менее ограничительных условиях на $\widehat{\alpha}_n$. Однако если положить $\widehat{\alpha}_n=n^{-\alpha}$, $0<\alpha<1$, то теорема становится уже неверной.

Таким образом, и в новой постановке описать классы функций ограниченной Ф-вариации через уклонения $M_n(f)$ удается лишь для достаточно быстро убывающих при $u \to 0$ функций $\Phi(u)$.

3. (Φ, n)-вариации и Ф-абсолютная непрерывность. Определение. Пусть $\Phi(u)=o(u)$. Положим

$$v_\Phi(n, f)=\inf_{\Pi_n}\{\sum_{i=1}^{n} V_\Phi(f, [x_{i-1}, x_i]),$$

где инфимум берется при фиксированном n по всем разбиениям $\Pi_n=\{a=x_0<x_1< \ldots <x_n=b\}$ отрезка $[a, b]$. Функцию $v_\Phi(n, f)$ целочисленного переменного n назовем (Φ, n)-*вариацией функции* f. (Φ, n)-вариации дают о функции f существенно больше информации, чем просто указание о том, что $V_\Phi(f)<\infty$. Например, эквивалентное определение Ф-абсолютно непрерывной функции f (см. [3]) состоит в том, что $v_\Phi(n, f)=o(1)$ при $n \to \infty$ $(\Phi(u)=o(u))$.

Теорема 4. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, $\Phi(u)=o(u)$ при $u \to 0$ и пусть*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Phi(2M_n(f, [a, b]))<\infty. \tag{4}$$

Тогда функция $f(x)$ Ф-абсолютно непрерывна, и при этом при любом $n=1, 2, \ldots,$

$$6n\Phi(\frac{1}{6n} \sum_{k=0}^{3(n-1)} 2M_k(f)) \leq v_\Phi(3n, f)$$

$$\leq 2n\Phi(\frac{3}{n} \sum_{k=1}^{n-1} 2M_k(f))+\sum_{k=n}^{\infty} \Phi(2M_k(f)).$$

Как следствие получается

Теорема 5. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна, $0<\alpha<1, p>1/\alpha$, $\Phi(u)=u^p$. Тогда $M_n(f)=O(n^{-\alpha})$ тогда и только тогда, когда $v_\Phi(n, f)=O(n^{-\alpha p+1})$.*

Обозначим через $R_n(f)$ наименьшее равномерное уклонение на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ от рациональных функций степени не выше n.

Замечание. Долженко [4] показал, что если $\Sigma R_n(f)(n\Phi^{-1}(1/n))^{-1}<\infty$, то при некотором положительном $k<1$ функция kf является Ф-абсолютно непрерывной. Теорема 4 показывает, что функция f является Ф-абсолютно непрерывной уже при условии $\Sigma\Phi(2R_n(f))<\infty$. При этом нетрудно показать, что это условие не может быть ослаблено. Таким образом, свойство Ф-абсолютной непрерывности охватывает различие в кусочно-монотонной и рациональной аппроксимациях лишь тогда, когда $u=O(\Phi(u))$, $u \to 0$ (в этом случае теорема 4 не имеет места).

4. Интегральные свойства; модуль колебания. Рассмотрим следующую интегральную характеристику (средний модуль колебания):

$$\Omega(\delta, f)=\sup_{0<h\leq\delta}\{(b-a)^{-1}\int_a^b \Omega(f, [x, x+\delta(b-a)] \cap [a, b])dx,$$

где $\Omega(f, E)$ — колебание функции f на множестве E.

О п р е д е л е н и е. Положим $v(\delta, f) = \sup_\mu \{\Omega(\delta, f \circ \mu)\}$, $0 < \delta \leq 1$, где $\mu = \mu(t)$ — всевозможные гомеоморфизмы отрезка $[a, b]$, $f \circ \mu = f(\mu(t))$. Функцию $v(\delta, f)$ назовем модулем колебания функции f на отрезке $[a, b]$.

Основные свойства модуля колебания вытекают из следующего утверждения.

Т е о р е м а 6. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, $n = 1, 2, \ldots, 1/(n+1) \leq \delta \leq 1/n$. Тогда*

$$v(\delta, f) = \delta \sum_{k=0}^{n-1} 2[M_k(f) - M_n(f)] + 2M_n(f),$$

в частности,

$$v(n^{-1}, f) = n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} 2M_k(f) = n^{-1} V_n(f).$$

Определим интегральный модуль непрерывности функции $f(x)$, $x \in [a, b]$, формулой

$$\omega(\delta, f)_L = \sup \{(b-a)^{-1} \int_a^{b-h(b-a)} |f(x+h(b-a)) - f(x)|\, dx : 0 < h \leq \delta\}.$$

С л е д с т в и е 1. *Пусть $n = 1, 2, \ldots, 1/(n+1) \leq \delta \leq 1/n$. Тогда $\omega(\delta, f)_L \leq \delta \Sigma_{k=0}^{n-1} 2[M_k(f) - M_n(f)] + 2M_n(f)$. При этом для бесконечной последовательности номеров n*

$$\sup_\mu \{\omega(n^{-1}, f \circ \mu)_L\} = n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} 2M_k(f).$$

С л е д с т в и е 2. $v(\delta, f) = O(\delta^\alpha)$ $(0 < \alpha < 1,\ \delta \to 0)$ *тогда и только тогда, когда* $M_n(f) = O(n^{-\alpha})$.

Модуль колебания $v(\delta, f)$ вбирает в себя полную информацию о наименьших уклонениях $M_n(f)$ функции f и удобен при сравнении с другими характеристиками: $\omega(\delta, f)_L \leq \Omega(\delta, f) \leq v(\delta, f) \leq \omega(\delta(b-a), f)_C$. В ряде случаев модуль колебания позволяет более полно, чем Ф-вариации, учесть интересующие нас особенности изменения функции. Примером такого случая является задача о тех условиях на функцию, которые необходимо наложить на нее, чтобы получить ту или иную скорость приближения ее рациональными функциями (или другими кусочно-монотонными функциями специального вида).

5. Равномерная сходимость рядов Фурье. Из теоремы 3 при $\alpha = 1/n$ и известного результата С а л е м а [5] немедленно вытекает такое достаточное условие равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье непрерывной 2π-периодической функции $f(x)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} M_n(f) < \infty \tag{5}$$

(см. [6]). Это же условие можно записать в форме $\int v(t, f)/t\, dt < \infty$, где $v(\delta, f)$ — модуль колебания функции $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$. Если вернуться к сравнению таких характеристик как модуль колебания и Ф-вариации, то можно отметить, что в вопросах равномерного приближения функций их суммами Фурье эти характеристики не имеют премущества одна перед другой.

В терминах кусочно-монотонных приближений можно дать существенно более общее, чем (5), условие равномерной сходимости рядов Фурье. Для этого положим

$$\widehat{M}_n(f)=\sup_{\Delta}\inf_{M_n}\{|\Delta|^{-1}\int_{\Delta}|f(x)-M_n(x)|\,dx\},$$

где инфимум берется по всем кусочно-монотонным функциям $M_n(x)$ порядка $\leq n$ на отрезке Δ ($|\Delta|$ — длина отрезка Δ), а супремум по всем отрезкам $\Delta\subseteq[-\pi, \pi]$. Очевидно, что $\widehat{M}_n(f)\leq M_n(f)$. При этом нетрудно показать, что при любых двух заданных последовательностей чисел $a_n\downarrow 0$, $b_n\downarrow 0$, $a_n\leq b_n$, найдется непрерывная функция f_0, для которой $\widehat{M}_n(f_0)\leq a_n \leq b_n\leq M_n(f_0)$, $n=1, 2, \ldots$

Теорема 7 [7]. *Если функция $f(x)$ непрерывна и 2π-периодична и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\widehat{M}_n(f)<\infty, \tag{6}$$

то ее тригонометрический ряд Фурье сходится равномерно.

Рассмотрим приближения в хаусдорфовой метрике. Сохраняя прежний смысл операций inf и sup, положим

$$H\widehat{M}_n(f)=\sup_{\Delta}\inf_{M_n}\{|\Delta|^{-1}h(f, M_n, \Delta)\},$$

где $h(f, M_n, \Delta)$ — хаусдорфово расстояние между графиками функций $f(x)$ и $M_n(x)$ на отрезке Δ.

Как следствие теоремы 7 получается

Теорема 8. *Если функция $f(x)$ непрерывна и 2π-периодична и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} H\widehat{M}_n(f)<\infty, \tag{7}$$

то ее ряд Фурье сходится равномерно.

Простые примеры показывают, что этот признак уже признака (6). В то же время легко показать, что признаки (7) и (5) несравнимы.

6. Рациональная аппроксимация. Обозначим через $R_n(f, 2\pi)$ наименьшее равномерное уклонение 2π-периодической функции $f(x)$ от тригонометрических рациональных функций порядка не выше n.

Характерной чертой многих теорем, в которых по скорости убывания уклонений $M_n(f)$ делаются заключения о тех или иных свойствах функции f, является то, что при замене в их формулировках уклонений $M_n(f)$ на $R_n(f)$ (в периодическом случае на $R_n(f, 2\pi)$) эти теоремы остаются точными. В качестве иллюстрации к сказанному приведем следующее утверждение.

Теорема 9 [6, 8]. *Если $0\leq\alpha\leq 1$ и выполняется условие*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1+\alpha}R_n(f, 2\pi)<\infty,$$

то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ равномерно суммируем методом $(C, -\alpha)$. При этом для любой последовательности $\rho_0\geq\rho_1$

$\geq \ldots \geq \rho_n \to 0$, $\Sigma n^{\alpha-1}\rho_n = \infty$, *найдется функция* $f_\alpha(x)$ *такая, что* $R_n(f_\alpha, 2\pi) \leq \rho_n$, $n = 0, 1, \ldots$, *а ряд Фурье функции* f_α *несуммируем методом* $(C, -\alpha)$ *в точке* $x = 0$ (суммирование методом $(C, -1)$ означает абсолютную сходимость ряда Фурье).

Первая часть теоремы 9 в случае $0 \leq \alpha < 1$ получается из следующего условия равномерной $(C, -\alpha)$-суммируемости ряда Фурье непрерывной функции $f(x)$: $\Sigma n^{\alpha-1} M_n(f, [-\pi, \pi]) < \infty$. Очевидно, что в случае $\alpha = 1$ это последнее условие не является достаточным для абсолютной сходимости ряда Фурье функции f, и в этом случае в теореме 9 аналитичность приближающих функций становится по существу. То же обстоятельство имеет место и в следующих ниже утверждениях, где через $\tilde{f}(x)$ обозначается функция, сопряженная к функции $f(x)$.

Теорема 10. *Имеет место неравенство*

$$\omega(\delta, \tilde{f})_L \leq C\delta \sum_{k=0}^{[1/\delta]} R_k(f, 2\pi), \quad 0 < \delta \leq 1. \tag{8}$$

где C *— абсолютная постоянная.*

Следствие [8]. *Если* $\Sigma R_n(f, 2\pi) < \infty$, *то функция* $\tilde{f}(x)$ *абсолютно непрерывна.*

Абсолютная непрерывность самой функции $f(x)$ была установлена Долженко [9]. Им была ранее получена также оценка для $\omega(\delta, f)_L$, совпадающая с оценкой (8) (см. [4]).

Теорема 11. *Пусть* $R_n(f, 2\pi) \leq Cn^{-\lambda}$, $C > 0, \lambda > 1$. *Тогда какими бы ни были* μ *и* α, *такие, что* $0 < \mu < \lambda$, $\alpha > \mu/\lambda$, *функция* $\tilde{f}(x)$ *имеет дифференциал порядка* μ *всюду за исключением, разве лишь, множества точек нулевой* α*-меры Хаусдорфа.*

Такими же свойствами обладает функция $f(x)$ (Гончар [10], Долженко [11]). При этом ограничение $\lambda > 1$ можно снять, считая, что $\lambda > 0$. Что касается функции $\tilde{f}(x)$, то при $0 < \lambda \leq 1$ она может быть неограниченной на любом интервале. В этом случае можно доказать такое утверждение.

Теорема 12. *Пусть* $R_n(f, 2\pi) = O(n^{-\lambda})$, $0 < \lambda < 1$, $\varepsilon > 0$, $p > 1$. *Тогда для почти всех* x

$$\left(h^{-1} \int_0^h |\tilde{f}(x+t) - \tilde{f}(x)|^p dt\right)^{1/p} = O(|h|^\lambda \log^{\lambda+\varepsilon} |h|^{-1}), \; h \to 0.$$

При $\lambda = 1$ *утверждение также справедливо, если показатель степени* $\lambda + \varepsilon$ *заменить на* $2 + \varepsilon$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. А. Севастьянов. Равномерные приближения кусочно-монотонными функциями и некоторые их приложения к Ф-вариациям и рядам Фурье. *Доклады АН СССР*, **217**, 1974, 27—30.
2. Е. А. Севастьянов. Кусочно-монотонная аппроксимация и Ф-вариации. *Anal. Math.*, **1**, 1975, 141—164.
3. J. Musielak, W. Orlicz. On generalized variations (I). *Studia Math.*, **18** 1959, 11—41.
4. Е. П. Долженко. Равномерные аппроксимации рациональными функциями (алгебраическими и тригонометрическими) и глобальные функциональные свойства. *Доклады, АН СССР*, **166**, 1966, 526—529.

5. R. Salem. Essais sur les séries trigonométriques. Paris, 1940.
6. Е. А. Севастьянов. Кусочно-монотонная и рациональная аппроксимации и равномерная сходимость рядов Фурье. *Anal. Math.*, **1**, 1975, 283—295.
7. Е. А. Севастьянов. О равномерном приближении функций суммами Фурье. *Матем. сб.* **114**, 1981, 583—610.
8. Е. А. Севастьянов. Рациональная аппроксимация и абсолютная сходимость рядов Фурье. *Матем. сб.*, **107** 1978, 227—244.
9. Е. П. Долженко. Скорость приближения рациональными дробями и свойства функций. *Матем. сб.*, **56**, 1962, 403—432.
10. А. А. Гончар. Обратные теоремы о наилучших приближениях рациональными функциями. *Изв. АН СССР, Сер. матем.*, **25**, 1961, 347—356.
11. Е. П. Долженко. О свойствах функций нескольких переменных, достаточно хорошо приближаемых рациональными дробями. *Изв. АН СССР, Сер. матем.*, **26**, 1962, № 5, 641—652.

Каширский пр. 1/1, 165.
Москва СССР

Получено 3 июня 1981 г.