КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'81
София, 1983, с. 157—161

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
Sofia, 1983, p. 157—161

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ НА КЛАССАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

А. И. Степанец

Резюме. Получено распространение на многомерный случай известного утверждения Корнейчука — Стечкина, позволяющего находить верхние грани интегралов от произведения двух функций, одна из которых является фиксированной и имеет специальный вид, а другая находится в классе, по которому ищется верхняя грань. Показаны некоторые из возможных приложений этого результата. В частности, найдены верхние грани коэффициентов Фурье на классах непрерывных функций многих переменных и приведены асимптотические равенства для верхних граней уклонений прямоугольных сумм Фурье на классах непрерывных периодических функций многих переменных.

Многие экстремальные задачи теории аппроксимации и другие задачи математического анализа сводятся к нахождению верхней грани функционалов вида

$$\int_A^B f(x)\psi(x)dx, \tag{1}$$

где $\psi(x)$ — определенная фиксированная функция, по заданному классу $\mathfrak{M}$ функций $f(x)$. Если в качестве $\mathfrak{M}$ выбран класс $H_\omega[A, B]$ функций $f(x)$, для которых выполняется условие

$$|f(x)-f(x')|\leqq\omega(|x-x'|), \quad x, x'\in[A, B], \tag{2}$$

в котором $\omega=\omega(t)$ — заданный модуль непрерывности, то в этом случае часто бывает полезным следующее утверждение Корнейчука — Стечкина (см., напр., [1]).

Утверждение К—С. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана суммируемая функция $\psi(x)$, такая, что почти всюду на (a, c) $\psi(x)>0$ $(\psi(x)<0)$ и почти всюду на (c, b) $\psi(x)<0$ $(\psi(x)>0)$, $a<c<b$, кроме того,

$$\int_a^b \psi(x)dx=0. \tag{3}$$

Тогда для любого модуля непрерывности $\omega=\omega(t)$

$$M_\omega(\psi)\overset{\mathrm{def}}{=}\sup\{|\int_a^b f(x)\psi(x)dx|: f\in H_\omega[a, b]\} \tag{4}$$

$$\leq \int_a^c |\psi(t)|\,\omega(\rho(t)-t)dt = \int_c^b |\psi(t)|\,\omega(t-\rho^{-1}(t))dt,$$

где функция $\rho(x)$ определена на $[a, c]$ посредством равенств

$$\int_a^x \psi(t)dt = \int_a^{\rho(x)} \psi(t)dt, \quad a \leq x \leq c \leq \rho(x) \leq b, \tag{5}$$

а $\rho^{-1}(x)$ — функция, обратная к $\rho(x)$.

Если $\omega = \omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности, то в (4) имеет место знак равенства, причем верхнюю грань реализуют функции из класса $H_\omega[a, b]$ вида $K \pm f^*(x)$, где K — произвольная постоянная и

$$f^*(x) = \begin{cases} -\int_x^c \omega'(\rho(t)-t)dt, & a \leq x \leq c, \\ \int_y^x \omega'(t-\rho^{-1}(t))dt, & c \leq x \leq b. \end{cases} \tag{6}$$

Это утверждение в случае $\omega(t) = t^\alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$ впервые было опубликовано Корнейчуком [2], где отмечалось, что оно было известно также и С. Б. Стечкину. Для произвольных модулей непрерывности $\omega(t)$ впервые оно приведено Корнейчуком [3].

Процедура применения утверждения К—С к интегралам вида (1) состоит в следующем. Предположим, что функция $\psi(x)$ такова, что отрезок $[A, B]$ удается разбить на промежутки $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ... $[x_{k-1}, x_k]$ ($x_0 = A$, $x_k = B$), на каждом из которых она удовлетворяет всем требованиям утверждения К—С при $a = x_i$, $b = x_{i+1}$, $i = \overline{0, k-1}$.

Тогда вследствие (4)

$$M_\omega^{A,B}(\psi) \overset{\text{def}}{=} \sup_{f \in H_\omega[A,B]} \left|\int_A^B f(x)\psi(x)dx\right| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \sup_{f \in H_\omega[x_i, x_{i+1}]} \left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\psi(x)dx\right| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \int_{x_i}^{c_i} |\psi(x)|\,\omega(\rho_i(t)-t)dt, \tag{7}$$

где c_i и $\rho_i(x)$ — аналоги величин c и $\rho(x)$ из соотношений (4) и (5) для промежутка $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, k-1}$.

Оценка (7) справедлива для любого модуля непрерывности $\omega(t)$. Если же $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности, то отправляясь от функций $f_i^*(x)$ — аналогов функции $f^*(x)$ для промежутков $[x_i, x_{i+1}]$, зачастую удается построить функцию $F^*(x) \in H_\omega[A, B]$, для которой значение интеграла (1) в точности совпадает со значением правой части (7). Это означает, что в таком случае соотношение (7) есть равенство. Таким образом, утверждение К—С является мощным аппаратом для изучения величин $M_\omega^{A,B}(\psi)$. Оно с успехом применялось как в названных выше работах Н. П. Корнейчука, так и в работах [4—6] и др.

Было естественным ожидать, что и в многомерном случае при изучении верхних граней функционалов — интегралов вида (1) — важную роль будет играть многомерный аналог утверждения К—С. Такой аналог найден. Приведем его формулировку в виде следующей леммы, но сначала условимся в ряде обозначений.

Пусть $P_{a,b}=[a_i \leq x_i \leq b_i]$, $i=\overline{1, N}$, $N \geq 1$ — N-мерный прямоугольник и $c=(c_1, \ldots, c_N)$ — точка из $P_{a,b}$, для которой выполняются неравенства $a_i < c_i < b_i$, $i=\overline{1, N}$. Будем говорить, что функция $\psi(t)$ (одного переменного) принадлежит множеству $V^c_{a,b}$ $(\psi \in V^c_{a,b})$, если она удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ условиям, оговоренным в утверждении К—С, в том числе и условию (3). Положим

$$\mathscr{E}_N(\psi; \omega)=\sup\{|\int_{P_{a,b}} \psi(t) f(t) dt|: f \in H^N_\omega(P_{a,b})\},$$

где

$$\psi(x)=\prod_{i=1}^{N} \psi_i(x_i), \quad \psi_i(x)=V^{c_i}_{a_i, b_i},$$

а $H^N_\omega(P_{a,b})$ — класс функций $f(x)=f(x_1, \ldots, x_N)$, удовлетворяющих на $P_{a,b}$ условию

$$(8) \qquad |f(x)-f(x')|=|f(x_1, \ldots, x_N)-f(x'_1, \ldots, x'_N)| \leq \sum_{i=1}^{N} \omega_i(|x_i-x'_i|),$$

в котором $\omega_i(t_i)$, $i=\overline{1, N}$ — произвольные (вообще говоря, различные) фиксированные модули непрерывности.

В принятых обозначениях справедлива

Лемма 1. *Каковы бы ни были модули непрерывности* $\omega_i(t_i)$, $i=\overline{1, N}$, $N \geq 1$,

$$(9) \qquad \mathscr{E}(\psi; \omega) \leq 2^{N-1} \int_{P_{a,c}} |\Psi(x)| \min_i \{\omega_i(\rho_i(x_i)-x_i)\} dx.$$

Если $\omega_i(t_i)$ *— выпуклые модули непрерывности, то*

а) *при* $N=2$ *соотношение* (9) *является равенством,*

б) *при любом* $N \geq 1$ *соотношение* (9) *является равенством, если*

$$(10) \qquad \psi_i(x_i)=-\psi_i(2c_i-x_i), \quad i=\overline{1, N}.$$

В этом случае $\rho_i(t_i)=2c_i-t_i$ *и, стало быть,*

$$(9') \qquad \mathscr{E}(\psi; \omega)=2^{N-1} \int_{P_{a,c}} |\psi(x)| \min_i \{\omega_i(2c_i-2x_i)\} dx.$$

Соотношения (9) и (9′) доказаны в работах автора [7] и [8], пункт а) — в работах автора [9] и [10]. Кроме того, в этих работах эффективно построены экстремальные функции, реализующие соответствующие верхние грани.

Отметим два результата, получающиеся посредством применения леммы 1.

Пусть сначала

$$(11) \qquad a_n(f)=a_{n_1, \ldots, n_N}(f)=\pi^{-N} \int_{P_{2\pi}} f(t) \prod_{i=1}^{N} \cos n_i t_i dt, \; P_{2\pi}=[t: |t_i| \leq \pi, \; i=\overline{1, N}],$$

где $n=(n_1, \ldots, n_N)$ — произвольный вектор с натуральными координатами. Ясно, что $a_n(f)$ является одним из коэффициентов Фурье с индексом n функции $f(t)=f(t_1, \ldots, t_N)$.

Рассмотрим величину

$$\mathscr{E}_n(\omega)=\sup\{|a_n(f)|:\ f\in H_\omega^{(N)}\},$$

где $H_\omega^{(N)}$ — класс 2π-периодических по каждой из переменных функций $f(x)=f(x_1, \ldots, x_N)$, для которых выполнено условие (8).

Если через H_n обозначить подмножество четных функций $\varphi(x)$ из класса $H_\omega^{(N)}$, удовлетворяющих условию

$$\varphi(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i+\frac{s_i\pi}{n_i}, x_{i+1}, \ldots, x_N)=(-1)^{s_i}\varphi(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots,$$

$$x_N),\ x_i\in[0, \pi/n_i],\ s_i=\overline{1, n_i-1},\ i=\overline{1, N},$$

то нетрудно показать, что

$$e_n(\omega)=\sup\{|a_n(f)|:\ f\in H_n\}.$$

Но если $f\in H_n$, то вследствие (11)

$$a_n(f)=\pi^{-N}\prod_{i=1}^{N} n_i\int_{P_0} f(t)\prod_{i=1}^{N}\cos n_i t_i dt,\quad P_0=[t:\ 0\le t_i\le\frac{\pi}{n_i},\ i=\overline{1, N}].$$

Следовательно,

$$e_n(\omega)=\pi^{-N}\prod_{i=1}^{N} n_i\sup\{\int_{P_0} f(t)\prod_{i=1}^{N}\cos n_1 t_1 dt:\ f\in H_n\}.$$

Легко видеть, что для оценки верхней грани в этом выражении можно применить лемму 1, в результате чего получим

$$(12)\qquad e_n(\omega)\le\pi^{-N}2^{2N-1}\int_{Q_N}\min_i\{\omega_i(\frac{2t_i}{n_i})\}\prod_{i=1}^{N}\sin t_i dt,\quad Q_N=[t:\ 0\le t_i\le\pi/2,$$

$$i=\overline{1, N}].$$

Соотношение (12) справедливо для любых модулей непрерывности $\omega_i=\omega_i(t_i)$, $i=\overline{1, N}$. Если же все эти модули являются выпуклыми, то оно обращается в равенство. В частности, если $\omega_i(t_i)=Mt_i$, $i=\overline{1, N}$, $M=\text{const}$ и, кроме того, $n_i=m$, $i=\overline{1, N}$, то из (12) получаем

$$e_n(\omega)=e_m(t)=\frac{M}{m}(\frac{4}{\pi})^N\int_{Q_N}\min_i(t_i)\prod_{i=1}^{N}\sin t_i dt$$

$$=\pi^{-N}m^{-1}M\ 4^{N-1}[\pi+2+(-1)^N(\pi-2)](N-1)!!\ (N!!)^{-1}.$$

В качестве другого результата, полученного при помощи леммы 1, приведем следующую теорему:

Теорема. *Пусть $S_n(f;\ x)=S_{n_1, \ldots, n_N}(f;\ x_1, \ldots, x_N)$ — частные прямоугольные суммы Фурье функции $f(x)$ порядка $n=(n_1, \ldots, n_N)$, n_i — произвольные натуральные числа,*

$$\mathscr{E}_n^{(N)}(\omega)=\sup\{\|f(x)-S_n(f;x)\|_C: f\in H^{(N)}\}.$$

Тогда при произвольном возрастании натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_N$

$$\mathscr{E}_n^{(N)}(\omega)\leqq\frac{2^{2N+1}}{\pi^{2N}}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j(k)\in\mathscr{Y}_N^{(k)}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k}\prod_{i\in C_{j(k)}}\ln n_i\int_{P_{j(k)}}\min_{i\in C_{j(k)}}\left\{\omega_i\left(\frac{2t_i}{n_i}\right)\right\}\prod_{i\in C_{j(k)}}\sin t_i dt$$

$$+O\Big[\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j(k)\in\mathscr{Y}_N^k}\min_{i\in C_{j(k)}}\left\{\omega_i\left(\frac{1}{n_i}\right)\right\}\sum_{\nu\in C_{j(k)}}\prod_{\substack{i\in C_{j(k)}\\ i\neq\nu}}\ln n_i\Big], \tag{13}$$

где

$$P_{j(k)}=[x:\ 0\leqq x_i\leqq\frac{\pi}{2},\quad i\in C_{j(k)},\quad x_i=0,\quad i\overline{\in} C_{j(k)}],$$

$\mathscr{Y}_N^k$ — множество всевозможных k-мерных векторов $j(k)=(j_1^{(k)},\ldots,j_k^{(k)})$, координаты которых — целые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$1\leqq j_1^{(k)}<j_2^{(k)}<\cdots<j_k^{(k)}\leqq N,\ k=\overline{1,N-1},\ \mathscr{Y}_N^0\overset{\text{def}}{=}\{j(0)\}\overset{\text{def}}{=}\{0\},$$

$C_{j(k)}$ — множество всех натуральных чисел, не превышающих N и отличных от координат вектора $j(k)$.

В случае, когда все функции $\omega_i(t_i)$, определяющие класс $H_\omega^{(N)}$, являются выпуклыми, в (13) всегда имеет место знак равенства.

Доказательство этой теоремы содержится в работах автора [7, 8]

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. П. Корнейчук. Экстремальные задачи теории приближения. Москва, 1976.
2. Н. П. Корнейчук. О приближении периодических функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Бернштейна — Рогозинского. *Доклады АН СССР*, **125**, 1959, № 2, 258—261.
3. Н. П. Корнейчук. Об оценке приближений класса H^α тригонометрическими многочленами. — В: Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. Москва, 1961, 148—154.
4. В. К. Дзядык, А. И. Степанец. Асимптотические равенства для точных верхних граней приближений функций классов Гельдера при помощи полиномов Рогозинского. *Укр. мат. ж.*, **24**, 1972, № 4, 476—487.
5. А. И. Степанец. Приближение непрерывных периодических функций многих переменных сферическими суммами Рисса. *Мат. заметки*, **15**, 1974, № 5, 821—832.
6. А. И. Степанец. Приближение непрерывных периодических функций полиномами Рогозинского. *Укр. мат. ж.*, **26**, 1974, № 4, 496—509.
7. А. И. Степанец. Приближение суммами Фурье непрерывных периодических функций многих переменных. Препринт ИМ-77-2, Киев, 1977.
8. А. И. Степанец. Оценки отклонений частных сумм Фурье на классах непрерывных периодических функций многих переменных. *Известия АН СССР, Сер. матем.*, **44**, 1980, № 5, 1150—1190.
9. А. И. Степанец. К одной задаче А. Н. Колмогорова в случае функций двух переменных. *Укр. мат. ж.*, **24**, 1972, № 5, 653—665.
10. А. И. Степанец. Об одной экстремальной задаче в пространстве непрерывных периодических функций многих переменных. — В: Вопросы теории функций и ее приложений. Киев, 160—178.

Институт математики АН УССР
Киев-4

Получено 7 июля 1981 г.