КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'81
София, 1983, с. 162—163

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
Sofia, 1983, p. 162—163

НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ

С. Б. Стечкин

Пусть X есть пространство C или Lp $(1\leq p<\infty)$ 2π — периодических функций, $k\in N$, $\omega_k(f, \delta)_X$ $(\delta\geqq 0)$ — модуль непрерывности k-го порядка функции $f\in X$. Пусть, далее, U есть линейный оператор, действующий из X в множество тригонометрических полиномов T_n порядка n.

Изучается поведение характеристики

$$\varphi_k(U, \delta)_X=\sup_{f\neq \mathrm{const}} \|f-Uf\|_X/\omega_k(f, \delta)_X \quad (0\leq\delta\leqq\pi), \tag{1}$$

как функции от δ. Эта верхняя грань конечна в том и только том случае, если $U\mathbf{1}=\mathbf{1}$. Поэтому это условие в дальнейшем всегда предполагается выполненным.

Многие классические оценки теории приближения функций имеют вид

$$\|f-U_nf\|_X\leqq K_k(U_n)\omega_k(f, \delta_n), \tag{2}$$

где $\delta_n\approx c/n$. При этом выбор δ_n ничем не обоснован. Исследование более общей задачи (1) позволяет указать естественное значение δ_n в неравенствах вида (2). Кроме того, оказывается, что функция $\varphi_k(U, \delta)_X$ в ряде случаев обладает неожиданными свойствами, представляющими несомненный интерес.

Технически задача (1) представляет собою частный случай задачи о приближении класса функций линейным методом U, когда этот класс есть

$$H_k(\omega^*)_X=\{f\in X|\ \omega_k(f, \delta)_X\leqq\omega^*(\delta) \quad (0<\delta\leqq\pi)\}$$

и определяется невыпуклой мажорантой ω^* модуля непрерывности.

В отличие от случая, когда $k=1$ и мажоранта ω^* выпукла вниз, здесь неизвестны общие подходы к соответствующим экстремальным задачам.

В настоящее время известно очень мало случаев, когда функция $\Phi_k(U, \delta)_X$ может быть явно определена для всех δ. Например, если $X=C$, $k=1$ и U есть положительный метод множителей, определяемый ядром

$$K_n(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\cos kt\geqq 0,$$

то

$$\varphi_1(U,\ \delta)_C=\frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\omega^*(t)K_n(t)dt,$$

где $\omega^*(t)=m$ $((m-1)\delta<t\leqq m\delta,\ m\in N)$. Ясно, что в этом случае $\varphi_1(U,\ \delta)_C$ строго убывает при возрастании δ $(0<\delta\leqq\pi)$. Нетрудно видеть, что всегда

$$\varphi_1(U,\ \pi)_C=\frac{1}{2}\left(\|U\|_{C\to C}+1\right).$$

Для многих методов приближения ситуация является совершенно иной. Впервые этого было выяснено автором [1]. В этой работе установлено, что если $U=\theta_n$, есть метод суммирования Фавара, определяемый ядром

$$\theta_n(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k\pi}{2n}\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{2n}\cos kt,$$

то для всех $\delta\geqq\pi/n$

$$\sup_{f\neq\mathrm{const}}\|f-\theta_n(f)\|_C/\omega(f,\ \delta)_C=\frac{1}{2}\left(\|\theta_n\|+1\right),$$

т. е. функция $\varphi_1(\theta_n,\ \delta)_C$ постоянна при $\delta\geqq\pi/n$.

В связи с этим естественно ввести следующую характеристику:

$$\delta_k^*(U)_X=\inf\{\delta>0\mid\varphi_k(U,\ \delta)_X=\varphi_k(U,\ \pi)_X\}.$$

Оказывается, что во многих случаях $\delta_k^*\asymp 1/n$, если $U:\ C\to T_n$.

Приведем несколько примеров.

Наиболее изученным является случай пространства C.

Гаврилюк [2] доказала, что для сумм Фавара

$$\delta_1^*(\theta_n)_C=\pi/n\quad(n\in N).$$

Гаврилюк и Стечкин [3, 4] доказали, что для сумм Фурье $U=S_n$

$$\delta_1^*(S_n)_C=\frac{2\pi}{3(n+1/2)}+O(n^{-3}).$$

Черных [5] доказал, что $\delta_1^*(S_n)_{L^2}\leqq\pi/(n+1)$, $\varphi_1(S_n,\ \delta)=1/\sqrt{2}$ $(\delta\geqq\delta_1^*)$. Нетрудно видеть, что всегда $\varphi_k(U,\ \delta)_X\asymp\delta^{-k}$ $(\delta\to 0)$.

В случае пространства C можно доказать, что

$$\forall U\quad\varphi_1(U,\ \delta)_C\approx A(U)/\delta\quad(\delta\to 0).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Б. Стечкин. О приближении непрерывных периодических функций суммами Фавара. *Труды МИ АН СССР*, **109**, 1971, 26—34.
2. В. Т. Гаврилюк. Про спостереження неперервных періодичних функцій богатьох змінних. *Доклады АН УССР, Сер. А*, 1974, № 11, 966—969.
3. В. Т. Гаврилюк, С. Б. Стечкин. Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье. *Доклады АН СССР*, **241**, 1978, № 3, 525—527.
4. В. Т. Гаврилюк, С. Б. Стечкин. Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье. Препринт 79.1, Инст. мат. АН УССР, Киев, 1979.
5. Н. И. Черных. О неравенстве Джексона в L^2. *Тр. МИ АН СССР*, **88**, 1967, 71—74.

Институт математики АН СССР
Москва В-333 СССР

Получено 4 июня 1981 г.