КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'81
София, 1983, с. 164—167

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
Sofia, 1983, p. 164—167

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ХАРДИ — ЛИТТЛВУДА

Э. А. Стороженко, Я. Валашек

Резюме. Пусть $f\in H^p$, $0<p\leqq\infty$. Радиальные предельные значения на единичной окружности обозначим через $f(e^{i\varphi})$. Модуль непрерывности k-того порядка функции f определим равенством

$$\omega_k(\delta, f)_p=\sup_{|h|\leqq\delta}\|\sum_{m=0}^{k}(-1)^m\exp\left(-ih\left(\frac{m(m-1)}{2}+m(k-m)\right)\right)\times P_{m,k}(e^{ih})f(e^{i(\varphi+mh)})\|,$$

где $P_{m,k}(z)=(1-z^{m+1})\cdots(1-z^k)/(1-z)\cdots(1-z^{k-m})$, $m=0, 1, \ldots, k-1$, $P_{k,k}(z)=1$.

В работе устанавливается неравенство

(1) $$M_p(r, f^{(k)})\leqq C_{p,k}(1-r)^{-k}\omega_k(1-r, f)_p,\quad 0<p<\infty,\ k=1, 2, \ldots,\ 0<r<1.$$

и обратные оценки $\omega_k(\delta, f)_p$ — через величины $M_p(r, f^{(k)})$ (Определение $\omega_k(\delta, f)_p$ и неравенство (1) принадлежат Э. А. Стороженко, обратные оценки Я. Валашеку.)

1. Пусть f — аналитическая функция внутри единичного круга и

$$M_p(r, f)=\{(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\varphi})|^p d\varphi\}^{1/p},\quad 0<p<\infty,$$

$$M_\infty(r, f)=\sup\{|f(re^{i\varphi})|:\ -\pi\leqq\varphi\leqq\pi\},\quad 0\leqq r<1.$$

Через H^p (классы Харди) обозначают множество всех функций f, у которых $\sup_{0\leqq r<1}M_p(r, f)=\|f\|_p<\infty$, $0<p\leqq\infty$. Хорошо известно, что по теореме Ф. Рисса для функций из H^p, $0<p\leqq\infty$, существуют радиальные предельные значения $f(e^{i\varphi})$ для почти всех $\varphi\in[-\pi, \pi)$ и

$$\|f\|_p=\{(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\varphi})|^p d\varphi\}^{1/p},\ 0<p<\infty,$$

$$\|f\|_\infty=\operatorname{ess\,sup}\{|f(e^{i\varphi})|:\ -\pi\leqq\varphi<\pi\}.$$

Модули непрерывности функции $f\in H^p$, $0<p\leqq\infty$, обычно определяются равенством

(1.1) $$\tilde{\omega}_k(\delta, f)_p=\sup\{\|\sum_{m=0}^{k}(-1)^{k-m}\binom{k}{m}f(e^{i(\varphi+mh)})\|_p:\ 0<h\leqq\delta\},\quad k=1, 2, \ldots$$

Мы предлагаем другое определение модуля непрерывности для $k \geqq 2$, по нашему мнению, более целесообразное в классах H^p.

(1.2)
$$\omega_k(\delta, f)_p$$
$$= \sup_{0<h\leqq\delta} \left\| \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \exp\left(-ih\left(\frac{m(m-1)}{2}+m(k-m)\right)\right) P_{m,k}(e^{ih}) f(\exp(i(\varphi+mh))\right\|_p,$$

где
$$P_{m,k}(z)=\frac{(1-z^{m+1})\dots(1-z^k)}{(1-z)\dots(1-z^{k-m})},\quad m=0,\dots,k-1;\ P_{k,k}(z)=1.$$

В частности,
$$\tilde{\omega}_1(\delta, f)_p=\omega_1(\delta, f)_p=\sup\{\|f(e^{i\varphi})-f(e^{i(\varphi+h)})\|_p:\ 0<h\leqq\delta\},$$
$$\omega_2(\delta, f)_p=\sup\{\|f(e^{i\varphi})-(1+e^{-ih})f(e^{i(\varphi+h)})+e^{-ih}f(e^{i(\varphi+2h)})\|_p:\ 0<h\leqq\delta\}.$$

Объясним происхождение суммы в (1.2)*. С этой целью напомним понятия разделенной и конечной разностей порядка k функции f в точках $z_0, z_1, \dots z_k$. Разделенные разности нулевого, первого и k-го порядков соответственно равны
$$[z_0]_f=f(z_0),\quad [z_0, z_1]_f=\frac{[z_0]_f-[z_1]_f}{z_0-z_1},$$
$$[z_0, z_1, \dots, z_k]_f=\frac{[z_0, \dots, z_{k-1}]_f-[z_1, \dots, z_k]_f}{z_0-z_k}.$$

Разделенная разность выражается через значения функции f в точках $z_0, z_1, \dots, z_k$ в виде

(1.3)
$$[z_0, \dots, z_k]_f=\sum_{m=0}^{k} f(z_m)\prod_{\substack{l=0\\ l\neq m}}^{k}(z_m-z_l)^{-1}.$$

Конечной разностью k-го порядка называют величину $[z_0, z_1, \dots, z_k; f; z_0]=[z_0, z_1, \dots, z_k]_f\Pi_{m=1}^{k}(z_0-z_m)$. Заметим, что при $z_m=z_0+mh$, $m=0, 1, \dots, k$ $[z_0, z_1, \dots, z_k; f; z_0]=\Delta_h^k f(z_0)$. Если $z_0=e^{i\varphi}$ и $z_m=z_0e^{imh}=e^{i(\varphi+mh)}$, то есть числа z_m образуют геометрическую прогрессию и лежат на единичной окружности, то из (1.3) следует (см. (1.2))
$$[z_0, z_1, \dots, z_k; f; z_0]\equiv[e^{i\varphi}, f]_h^k=\sum_{m=0}^{k}(-1)^m\exp\left(-ih\left(\frac{m(m-1)}{2}\right.\right.$$
$$\left.\left.+m(k-m)\right)\right)P_{m,k}(e^{ih})f(\exp(i(\varphi+mh)).$$

Кроме того, справедливо рекуррентное соотношение

(1.4)
$$[e^{i\varphi}, f]_h^k=[e^{i\varphi}, f]_h^{k-1}-e^{-i(k-1)h}[e^{i(\varphi+h)}, f]_h^{k-1},$$

то есть конечная k-я разность $[e^{i\varphi}, f]_h^k$ получается из $(k-1)$-й в результате сдвига, поворота на $-(k-1)h$ и вычитания, в отличие от ранее употреблявшегося соотношения

* Проблема определения модулей непрерывности для функций комплексного переменного достаточно полно обсуждается в [1].

$$\Delta_h^k f(e^{i\varphi}) = \Delta_h^{k-1} f(e^{i\varphi}) - \Delta_h^{k-1} f(e^{i(\varphi+h)}).$$

Конструкция (1.2) обеспечивает важное свойство модулей непрерывности

$$\omega_k(\delta, f + T_{k-1})_p = \omega_k(\delta, f)_p, \quad T_{k-1}(e^{i\varphi}) = \sum_{m=-(k-1)}^{k-1} a_m e^{im\varphi}.$$

На основании (1.4) по индукции устанавливается тождество

$$[e^{i\varphi}, f]_{nh}^k = \sum_{m_1=0}^{n-1} \ldots \sum_{m_k=0}^{n-1} \exp(-i(m_2 + 2m_3 + \cdots + (k-1)m_k))\, [\exp i(\varphi + m_1 h + \cdots + m_k h), f]_h^k,$$

из которого выводится привычное свойство $\omega_k(\delta, f)_p$:

$$\left.\begin{aligned} &\omega_k^p(\lambda\delta, f)_p \leqq (\lambda+1)^k \omega_k^p(\delta, f)_p, \quad 0 < p \leqq 1 \\ &\omega_k(\lambda\delta, f)_p \leqq (\lambda+1)^k \omega_k(\delta, f)_p, \quad 1 \leqq p \leqq \infty \end{aligned}\right\}, \quad \lambda > 0.$$

2. Харди и Литтлвуд [2], исследуя поведение $M_p(r, f')$ в зависимости от поведения $M_p(r, f)$, показали, что при $r \to 1-0$

$$M_p(r, f) = O((1-r)^{-\beta}) \Leftrightarrow M_p(r, f') = O((1-r)^{-\beta-1}), \; 0 < p \leqq \infty, \; \beta > 0.$$

Позже для функций $f \in H^p$, $0 < p \leqq \infty$, было получено более точное соотношение $M_p(r, f') \leqq C_p (1-r)^{-1} \omega_1(1-r, f)_p$ ($p \geqq 1$ в [3] и $0 < p < 1$ в [4]). Отсутствие обобщения этого результата на производные и модули непрерывности высших порядков, по нашему мнению, можно объяснить тем, что $\tilde{\omega}_k(\delta, f)_p$ оказался неудобной структурной характеристикой функции $f \in H^p$. При помощи $\omega_k(\delta, f)_p$ мы установили неравенство

$$M_p(r, f^{(k)}) \leqq C_{p,k} (1-r)^{-k} \omega_k(1-r, f)_p, \; 0 < p < \infty, \; k = 2, 3, \ldots, \; 0 < r < 1. \tag{2.1}$$

Доказательство (2.1) базируется на следующих теоремах.

Теорема 2.1. *Пусть функция f аналитична внутри единичного круга, $0 < p \leqq \infty$, $0 < r < 1$ и $k \in N$. Тогда существуют числа $q = q(r, p, k) > 1$ и натуральное n_0, такие, что*

$$M_p(\rho, f') \leqq C_p (\rho(q-1))^{-1} M_p(\rho q^{n_0}, f(z) - f(qz)),$$

где $\rho = r q^{m(n_0+1)} < 1$; $m = 0, 1, \ldots, k-1$.

Теорема 2.2. *Для $f \in H^p$, $0 < p \leqq \infty$, и $k \in N$ справедлива оценка*

$$\| f(e^{i\varphi}) - U_k(e^{i\varphi}, \rho, f) \|_p = \Big\| \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \rho^{-\frac{m(m-1)}{2} - m(k-m)} P_{m,k}(\rho) f(\rho^m e^{i\varphi}) \Big\|_p$$

$$\leqq C_{p,k,\rho_0} \omega_k(1-\rho, f)_p, \quad 0 < \rho_0 \leqq \rho \leqq 1.$$

Суммы $U_k(e^{i\varphi}, \rho, f)$ можно рассматривать как обобщение средних Абеля—Пуассона.

Используя теорему 2.1, можно получить оценку снизу величины $\| f(\rho e^{i\varphi}) - f(e^{i\varphi}) \|_p$ того же порядка, как и в теореме 2.2 при $k = 1$.

Результаты теоремы 2.1 успешно применяются к нахождению окончательных условий вложения $H^p \subset H^q$ $(0 < p < q < \infty)$ в терминах модулей непрерывности функции f. Эти условия для функций из $L^p[0, 2\pi]$, $p \geqq 1$ указаны Ульяновым [5]. Метод доказательства П. Л. Ульянова основан на применении равноизмеримой перестановки функции f; в случае пространств Харди способ рассуждений более прост.

3. В связи с неравенством (2.1) возникает вопрос и об обратных оценках модуля непрерывности порядка k функции $f \in H^p$ через величины $M_p(r, f^{(k)})$. В этом направлении классическими являются результаты Харди и Литтлвуда [6] для липшицевых классов при $p \geqq 1$. Для произвольных модулей непрерывности имеется оценка Брудного и Гопенгауза [3]. Для остальных значений k и p имеют место следующие результаты.

Теорема 3.1. *Пусть* $f \in H^p$, $1 \leqq p \leqq \infty$, $k \in N$ и $M_p(r; f^{(k)}) \leqq C_{p,k}\omega(1-r) \times (1-r)^{-k}$, *тогда для того, чтобы* $\omega_k(1-r, f)_p = O(\omega(1-r))$, *достаточно, чтобы*

$$\int_r^1 \ldots \int_r^1 \omega(1 - \prod_{j=1}^{k} \rho_i)(1 - \prod_{j=1}^{k} \rho_j)^{-k} d\rho_1 \ldots d\rho_k = O(\omega(1-r))\,; \quad r \to 1-0.$$

Теорема 3.2. *Пусть* $f \in H^p$, $0 < p < 1$, $k \in N$ *и* $M_p(r, f^{(k)}) \leqq C_{p,k}\omega(1-r) \times (1-r)^{-k}$. *Тогда для того, чтобы* $\omega_k(1-r, f)_p = O(\omega(1-r))$, *достаточно, чтобы для каждого* $r, 0 < r < 1$ *существовала последовательность* $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$; $r_1 = r$; $r_n \uparrow 1$, *такая, что*

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{n_k=1}^{\infty} \{\omega(1 - \prod_{j=1}^{k} r_{n_j+1})(1 - \prod_{j=1}^{k} r_{n_j+1})^{-k} \prod_{j=1}^{k} (r_{n_j+1} - r_{n_j})\}^p \leqq C'_{p,k}\omega^p(1-r).$$

Замечание. Если $\omega(\delta) = \delta^\alpha$, $0 < \alpha \leqq k$, то неравенства (3.1) и (3.2) выполнены. Следовательно, условия (см. еще (2.1))

$$M_p(r, f^{(k)}) = O((1-r)^{\alpha-k}),$$

$$\omega_k(\delta, f)_p = O(\delta^\alpha)$$

эквивалентны.

В случае $k = 1$ при $p \geqq 1$ этот результат принадлежит Харди и Литтлвуду [6].

Результаты пп. 1 и 2 получены Э. А. Стороженко, п. 3 — Я. Валашеком.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. М. Тамразов. Гладкости и полиномиальные приближения. Киев, 1975.
2. G. H. Hardy, J. E. Littlewood. Some properties of conjugate functions. *J. reine u angew. Math.*, **167**, 1931, 405—423.
3. Ю. А. Брудный, И. Е. Гопенгауз. Обобщение одной теоремы Харди и Литтлвуда. *Мат. сб.*, **52**, 1960, 891—894.
4. Э. А. Стороженко. Приближения функций и теоремы вложения в пространствах H^p и L^p. (Диссертация, Тбилиси, 1979.)
5. П. Л. Ульянов. Вложение некоторых классов функций H_p^ω. *Изв. АН СССР, Сер. матем.*, **32**, 1968, 649—686.
6. G. H. Hardy, J. E. Littlewood. Some properties of fractional integrals. II. *Math. Z*, **34**, 1931/32, 403—439.

Ул. Пионерская 20^а, кв. 6
270056, Одесса-56 СССР

Получено 10 июня 1981 г.

Ул. Довженко 9^а, кв. 424
270058, Одесса-58 СССР