КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'81
София, 1983, с. 168—170

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'81
Sofia, 1983, p. 168—170

О ПРИБЛИЖЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ СРЕДНИМИ ЧЕЗАРО ВТОРОГО ПОРЯДКА

С. А. Теляковский

Резюме. Изучаются верхние грани уклонений функций класса $\overline{W}^1$ от средних Чезаро второго порядка $F_n^2(\overline{W}^1)$. Подтверждена гипотеза Секефальви-Надя о том, что экстремальная функция в этой задаче зависит от n. Вместе с тем функция, экстремальная для соответствующих верхних граней $F_n^\alpha(\overline{W}^1)$ при $\alpha \geqq 3$, асимптотически близка к экстремальной и при $\alpha=2$. Секефальви-Надь установил оценку $F_n^\alpha(\overline{W}^1) < F_n^{\alpha+1}(\overline{W}^1)$ для $\alpha \geqq 3$. Доказано, что эта оценка справедлива и при $\alpha=2$.

Доклад посвящен изучению верхних граней уклонений функций класса $\overline{W}^1$ от средних Чезаро второго порядка $F_n^2(\overline{W}^1) = \sup\{|f(0) - \sigma_n^2(f, 0)| : f \in \overline{W}^1\}$.

Б. Секефальви-Надь рассмотрел вопрос об экстремальных функциях для верхних граней уклонений функций f классов W^r и $\overline{W}^r$ от средних Чезаро $\sigma_n^\alpha(f, x)$ произвольного порядка $\alpha (r=1, 2, \ldots, \alpha=1, 2, \ldots)$. Он доказал ([1, 2]), что во всех случаях, кроме $\alpha=1$ и $\alpha=2$ для класса $\overline{W}^1$, экстремальные функции не зависят от n.

В [2] он высказал предположение, что в указанных исключительных случаях экстремальные функции зависят от n. Для $\alpha=1$ это утверждение фактически было доказано Стечкиным (см. [3, 4]), нашедшим главный член асимптотики соответствующих верхних граней

$$F_n^1(\overline{W}^1) = (2/\pi n)\int_0^\infty \left|\int_x^\infty t^{-2}\sin t\,dt\right| dx + O(n^{-2}).$$

Мы доказываем, что для чисел n вида $4m+1$ и $4m+2$ верхняя грань $F_n^2(\overline{W}^1)$ достигается на функции

$$g(x) = \pi^{-1} 4 \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu (2\nu+1)^{-2} \cos(2\nu+1)x,$$

на которой достигаются верхние грани уклонений $F_n^\alpha(\overline{W}^1)$ при $\alpha \geqq 3$ для всех n. Для чисел n вида $4m-1$ и $4m$ экстремальная функция для $F_n^2(\overline{W}^1)$

зависит от n, но $F_n^2(\overline{W}^1)=g(0)-\sigma_n^2(g,0)+O(n^{-4})$. Отсюда в качестве следствия вытекает, что $F_n^2(\overline{W}^1)=(2/n)-(1+2/\pi)n^{-2}+(1+2/\pi)n^{-3}+O(n^{-4})$.

Кроме этой асимптотической формулы, для всех n доказана оценка

$$F_n^2(\overline{W}^1)\leqq(n(n+1))^{-1}(2n+1)=(2/n)-(n(n+1))^{-1}, \tag{1}$$

уточняющая оценку Секефальви-Надя $F_n^2(\overline{W}^1)<4/n$.

Секефальви-Надь доказал, что для $\alpha\geqq 3$

$$F_n^{\alpha}(\overline{W}^1)<F_n^{\alpha+1}(\overline{W}^1). \tag{2}$$

Покажем, что эта оценка справедлива и при $\alpha=2$.

Так как для чисел n вида $4m+1$ и $4m+2$ $F_n^2(\overline{W}^1)=g(0)-\sigma_n^2(g,0)$, то, как и при $\alpha\geqq3$, оценка (2) при $\alpha=2$ для этих n следует из того, что $\sigma_n^{\alpha}(g,0)-\sigma_n^{\alpha+1}(g,0)=(n+\alpha)^{-1}\sigma_n^{\alpha}(\operatorname{sign}\cos x,0)>0$.

Пусть теперь число n имеет вид $4m-1$ или $4m$. Положим $N=[(n-1)/2]=2m-1$. Тогда

$$F_n^3(\overline{W}^1)=g(0)-\sigma_n^3(g,0)=4\pi^{-1}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}(2\nu+1)^{-2}$$

$$-4\pi^{-1}\sum_{\nu=0}^{N}(1-(2\nu+1)/n)(1-(2\nu+1)(n+1)^{-1})(1-(2\nu+1)(n+2)^{-1})$$

$$\times(-1)^{\nu}(2\nu+1)^{-2}=4\pi^{-1}\Big[\sum_{\nu=N+1}^{\infty}(-1)^{\nu}(2\nu+1)^{-2}+(n^{-1}+(n+1)^{-1}+(n+2)^{-1})$$

$$\times\sum_{\nu=0}^{N}(-1)^{\nu}(2\nu+1)^{-1}+[n(n+1)(n+2)]^{-1}\sum_{\nu=0}^{N}(-1)^{\nu}(2\nu+1)\Big]$$

$$=n^{-1}+(n+1)^{-1}+(n+2)^{-1}+4\pi^{-1}\Big[\sum_{\nu=N+1}^{\infty}(-1)^{\nu}(2\nu+1)^{-2}-(n^{-1}+(n+1)^{-1}$$

$$+(n+2)^{-1})\sum_{\nu=N+1}^{\infty}(-1)^{\nu}(2\nu+1)^{-1}-2m[n(n+1)(n+2)]^{-1}\Big].$$

Так как последовательности $\{(2\nu+1)^{-2}\}$ и $\{(2\nu+1)^{-1}\}$ выпуклы, то

$$\sum_{\nu=N+1}^{\infty}(-1)^{\nu}(2\nu+1)^{-2}>2^{-1}[2(N+1)+1]^{-2}\geqq2^{-1}(n+2)^{-2}$$

и

$$\sum_{\nu=N+1}^{\infty}(-1)^{\nu}(2\nu+1)^{-1}<(2(N+1)+1)^{-1}-2^{-1}[2(N+2)+1]^{-1}$$

$$\leqq(n+1)^{-1}-(2(n+3))^{-1}.$$

Поэтому

$$F_n^3(\overline{W}^1)-(2n+1)n(n+1)^{-1}>(n+2)^{-1} \tag{3}$$

$$+4\pi^{-1}[2^{-1}(n+2)^{-2}-(n^{-1}+(n+1)^{-1}+(n+2)^{-1})((n+1)^{-1}-(2(n+3))^{-1})$$

$$-(2n(n+2))^{-1}]=(n+2)^{-1}\{1-4(\pi n(n+2))^{-1}-2\pi^{-1}(n^{-1}+(n+1)^{-1}$$
$$+(n+2)^{-1})(1+(n+1)^{-1})(1+2(n+3)^{-1})\}.$$

В силу (1) для доказательства оценки (2) при $\alpha=2$ для чисел n вида $4m-1$ и $4m$ достаточно установить положительность выражения, стоящего в (3) в фигурных скобках. С ростом n это выражение возрастает, поэтому нужно убедиться в его положительности при наименьшем из рассматриваемых n — при $n=3$, что легко проверяется.

Опираясь на результаты Никольского [5] и Стечкина и Теляковского [6], нетрудно убедиться, что оценка (2) при $\alpha=2$ справедлива и для приближений в метрике L класса функций, определяемого соответствующим условием в метрике L.

Вопрос о том, для каких n функция $g(x)$ является и для каких n не является экстремальной, выяснен в [7]. Там же доказана асимптотическая формула (1).

Примечание при корректуре. Асимптотическая оценка для $F_n^\alpha(\overline{W})$ с точностью до $O(n^{-4})$ доказана в работе: С. А. Теляковский. О приближении функций средними Чезаро второго порядка. *Analysis Math.*, **8**, 1982, 305—319.

ЛИТЕРАТУРА

1. B. Szökefalvi-Nagy. Függvények megközelitése Fourier-sorok számtani közepeived, *Mat. Fiz. Lapok*, **49**, 1942, 123—138.
2. B. Szökefalvi-Nagy. Approximation der Funktionen durch diearithmetischen Mittel ihrer Fourierschen Reihen. *Acta Sci. Math., Szeged*, **11**, 1946, 71—84.
3. С. А. Теляковский. Приближение диффенцируемых функций суммами Валле-Пуссена. *Доклады АН СССР*, 121, 1958, 426—429.
4. С. А. Теляковский. О приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. *Изв. АН СССР, Сер. матем.*, **24**, 1960, 213—242.
5. С. М. Никольский. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем. *Изв. АН СССР, Сер. матем.*, **10**, 1946, 207—256.
6. С. Б. Стечкин, С. А. Теляковский. О приближении дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами в метрике *L*. *Тр. Мат. инст. АН СССР*, **88**, 1967, 20—29.
7. С. А. Теляковский. О приближении функций класса $\overline{W}^1$ средними Чезаро. *Тр. Мат. инст. АН СССР*, **157**, 1981, 191—197.

Математический институт АН СССР
Москва В-333 СССР

Получено 3 июня 1981 г.